

## VI.6 Meccanica quantistica

### INTRODUZIONE

La apertura del capitolo è dedicata ai 6 postulati che costituiscono la ossatura della intera MQ e vedrete che si leggono con piacere e senza bisogno di appelli né alla fede né a competenze matematiche improponibili. Lo schema della teoria è semplice, accattivante anche se contro intuitivo.

Oltre ad enunciarli ho dedicato molta attenzione ad illustrarne il significato e a sottolinearne i nessi reciproci.

Il paragrafo successivo è interamente dedicato al principio di indeterminazione facendone vedere la dipendenza dalla struttura assiomatica della teoria. Tutte le coppie di operatori che non commutano, cioè tutte le coppie di operatori  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  per i quali  $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  risulta diverso da zero sono soggetti ad una indeterminazione quando si cerchi di determinarne simultaneamente il valore; tale indeterminazione è soggetta ad una medesima legge.

Il terzo paragrafo è interamente dedicato alla teoria quantistica del momento angolare una osservabile caratterizzata da una stranezza legata al tema della non commutazione: si tratta di un *vettore* per il quale sono determinabili una componente e il modulo mentre altre due sono libere e da queste *regole* seguono le caratteristiche del secondo e terzo numero quantico dei modelli atomici. Data la importanza del tema ho esplicitamente svolto i calcoli che si basano su una coppia di operatori detti di *shift* perché fanno crescere e decrescere di una stessa quantità i valori del momento angolare ogni volta che si usano.

Il quarto paragrafo tratta di quel particolare momento angolare detto *spin* che, rispetto ai momenti angolari orbitali, presenta il vantaggio di essere collocato in uno spazio di Hilbert a due dimensioni e di essere pertanto comodo da maneggiare.

Lo spin viene analizzato seguendo due approcci: una introduzione basata sulla esecuzione di esperimenti ideali alla Stern & Gerlach e una seconda trattazione classica basata sulla costruzione delle cosiddette *matrici di Pauli*, gli operatori introdotti da Wolfgang Pauli subito dopo la scoperta dello spin per collocarlo all'interno della struttura teorica della Meccanica Quantistica.

Mentre mi documentavo qua e là, sullo spin ho trovato un testo che, seppur a livello elettronico, e non nucleare, si occupava della trattazione quantistica del fenomeno della risonanza degli spin, così mi è venuta l'idea di approfondire ed è saltato fuori un ampio paragrafo dedicato ai principi di funzionamento della risonanza magnetica nucleare che, in ossequio al *politicamente corretto* secondo cui la parola nucleare evoca fantasmi, negli states hanno iniziato a chiamare MRI *magnetic resonance imaging*.

Mi sono dedicato principalmente agli aspetti fisici di funzionamento fermandomi alla soglia degli algoritmi che consentono di trasformare i segnali elettromagnetici di riassetamento in immagini, ma ne è venuto fuori qualcosa di interessante e che raramente si ritrova in un corso di fisica.

La ultima parte del capitolo è dedicata ad argomenti che, quando mi sono laureato erano considerati cose da *rompisciole*, la discussione su alcuni aspetti strani e inattesi della Meccanica quantistica.

Si tratta di questioni nate intorno alle insoddisfazioni epistemologiche di Einstein che, senza mettere in discussione l'impianto della MQ che aveva contribuito a creare, trovava insoddisfacenti alcune conclusioni che avevano a che fare con il *collasso* della funzione d'onda quando si esegue una misura.

Per alcuni sistemi quantistici, caratterizzati dalla non separabilità, cioè dalla impossibilità di separare il sistema nei suoi singoli componenti, si verificano (a livello di esperimento mentale) fatti che Einstein definiva *sinistri* (o diabolici): la misura su uno dei componenti determinerebbe istantaneamente il valore della stessa grandezza sugli altri componenti del sistema a qualsiasi distanza essi si trovino.

La discussione su queste faccende, innescata da Einstein negli anni 30 del 900 è andata avanti come se quelli che ponevano certe questioni fossero dei *rompiballe* perché l'impianto della MQ era solido e i risultati lo stavano a dimostrare.

Ma tra la fine degli anni 60 e i primi anni 70 un fisico irlandese del CERN che, ufficialmente si occupava di acceleratori, ma nel tempo libero rifletteva sui fondamenti, tirò fuori un teorema del tutto generale (più generale della MQ) che consentiva di sottoporre ad indagine sperimentale l'intera questione.

Una ipotetica teoria *realista*, che bandisse le indeterminazioni attraverso variabili nascoste, che rispettasse il *principio di località* secondo cui nessuna informazione e interazione si può propagare a velocità superiore alla velocità della luce, avrebbe dovuto rispettare una determinata disegualianza che invece era disattesa dalla MQ.

Fu così che a partire dagli anni 70 iniziarono una serie di esperimenti di verifica del comportamento di sistemi *entangled*, quelli per i quali si prevedevano i *comportamenti sinistri*.

L'esperimento decisivo fu realizzato da una equipe francese guidata da Alain Aspect. Le insoddisfazioni di Einstein erano malposte. La MQ è intrinsecamente non locale e gli esperimenti le danno ragione.

Degli esiti ne tratterò in un altro capitolo perché questo viaggia verso le 70 cartelle che, per un capitolo sono tante.

Se arriverete sino in fondo vedrete che, questa volta, gli esercizi e i problemi sono davvero pochi. E' stata una scelta consapevole; gli aspetti tecnici lasciamoli agli specialisti e cerchiamo invece di rendere consapevoli le persone del fatto che il mondo, su scala microscopica, presenta aspetti inattesi. Cambia la scala e cambiano le leggi.

## 6.1 La teoria assiomatica della meccanica quantistica

Dopo tanta matematica astratta siamo finalmente approdati ai postulati su cui viene fondata la meccanica quantistica. Come vedremo, dopo aver stabilito il linguaggio (gli spazi di Hilbert con le loro proprietà, inclusi gli operatori) la enunciazione della teoria è relativamente semplice dal punto di vista concettuale, anche se è poi molto complessa quando si passa dagli enunciati alle applicazioni che richiedono l'utilizzo di strumenti matematici molto sofisticati e che, nella maggioranza dei casi, portano a risolubilità solo in forma approssimata.

La M.Q. superata la fase eroica di costruzione del suo formalismo, come tutte le teorie fondamentali, è stata completamente assiomatizzata per garantirne eleganza, semplicità, controllabilità e consistenza.



### 6.1.1 POSTULATO 1 - LA FUNZIONE DI STATO

Lo stato di un sistema fisico avente  $n$  gradi di libertà è completamente descritto da una funzione di stato dipendente dal tempo e da  $n$  variabili a valori complessi, vettore  $|\Psi\rangle$ ; tale funzione (vettore) è immersa in uno spazio di Hilbert.

*Tutte le informazioni che si possono estrarre sul sistema sono contenute in questa funzione che deve essere continua, limitata, integrabile, derivabile con derivate continue sul dominio della funzione medesima.*

Solitamente lo stato di un sistema è espresso con una modalità che consente di dare un senso allo stato di ogni singolo componente, ma esistono anche degli stati (detti stati di *entanglement*<sup>1</sup>) per i quali non è possibile dato lo stato del sistema esprimere lo stato di ogni sua parte. Tutto ciò ha dato luogo a profonde discussioni di natura epistemologica innescate da Schrödinger ed Einstein e che si sono concluse, negli ultimi decenni del XX secolo in maniera inaspettata: la meccanica quantistica non rispetta il principio di località, ovvero *ciò che accade qui ed ora* può determinare in maniera istantanea cambiamenti nello stato di una particella che si trovi lontano quanto si vuole dal punto di misurazione.

Per assegnare lo stato del sistema è sufficiente assegnare il vettore ad un particolare istante  $t_0$  (ciò che si chiama *preparazione del sistema*).

Questo è un aspetto molto importante perché conoscere lo stato ad un determinato istante richiede la effettuazione di misure e ciò rimanda al successivo postulato 5.

Attenzione; la funzione di stato non ha significato fisico ma è lo strumento attraverso cui si governa l'intero processo come vedremo dal postulato 6.

Il primo postulato, al di là della astrattezza dell'enunciato, è denso di significato perché parlare di informazione massima possibile vuol dire che si sta sostenendo che *la teoria è completa* e si esclude in partenza ogni ipotesi di completamento attraverso la introduzione di *variabili nascoste*; completamento ipotizzato per dar conto della *bizzarria della teoria* che

<sup>1</sup> Letteralmente vuol dire groviglio, intreccio, garbuglio, ma il termine inglese è entrato a far parte a pieno titolo della terminologia della meccanica quantistica e dunque solitamente non lo si traduce.

non soddisfa tutti i criteri di tipo deterministico cui siamo abituati in fisica classica.

Un altro elemento importante da cogliere è che lo spazio di Hilbert è uno spazio lineare e dunque se due vettori soddisfano le equazioni allora vanno prese in considerazione, come rappresentative dello stato, anche le loro infinite possibili combinazioni lineari.

Questo è uno degli elementi di contraddizione perché postula, prima di ogni osservazione sul sistema, la coesistenza di elementi di realtà che potrebbero essere in contrasto tra loro.



### 6.1.2 POSTULATO 2 - LE OSSERVABILI E GLI OPERATORI

Una grandezza fisica misurabile  $A$ , è associata ad un operatore lineare hermitiano  $\hat{A}$  detto *osservabile*, che agisce sulla funzione di stato. La teoria consente, attraverso regole definite, di costruire l'operatore corrispondente alla grandezza fisica considerata.

Enumeriamo alcuni degli operatori di uso comune:

Nome della osservabile	Classico	simbolo	Espressione
posizione	$x, y, z$	$\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$	$x, y, z$
Impulso (detto anche quantità di moto)	$\vec{p}$	$\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$	$-i\hbar \nabla^2$
Energia	$\mathcal{E}$	$\hat{\mathcal{E}}$	$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$
Energia cinetica	$\mathcal{E}_k = \frac{p^2}{2m}$	$\hat{\mathcal{E}}_k$	$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$
Hamiltoniana	$\mathcal{E}_k + V$	$\hat{H}$	$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r)$
Momento angolare	$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$	$\hat{L}_x,$ $\hat{L}_y,$ $\hat{L}_z,$	$-i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$ $-i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$ $-i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$
Spin (non ha analogo classico)		$\mu_s = -\frac{e}{m} \hat{S}$	$\hat{S}_x = \frac{1}{2} \hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\hat{S}_y = \frac{1}{2} \hbar \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ $\hat{S}_z = \frac{1}{2} \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Tabella VI.6.1	<b>GLI OPERATORI DI USO COMUNE</b>		

<sup>2</sup> Si ricordi che il simbolo  $\nabla$  indica l'operatore vettoriale  $\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

Ad ogni grandezza fisica classica, corrisponde un operatore hermitiano, ma esistono anche operatori hermitiani utili in MQ, che non rinviano ad alcuna grandezza fisica classica; uno di questi è lo spin delle particelle.

Si tenga infine presente che quando una osservabile classica è espressa attraverso le variabili  $q$  e  $p$  della meccanica analitica si può produrre il corrispondente operatore sostituendo tali variabili con gli operatori che le descrivono in MQ.<sup>3</sup>

Lo spazio di Hilbert è associato ad ogni operatore e quando si studiano sistemi complessi si opera in uno spazio corrispondente ad una sorta di prodotto cartesiano tra gli spazi di ogni singolo componente del sistema.



### 6.1.3 POSTULATO 3 - I POSSIBILI RISULTATI DI UNA MISURA

I possibili risultati della misura della grandezza fisica  $\hat{A}$  sono tutti e soli gli autovalori della corrispondente equazione agli autovalori tra l'operatore e la funzione di stato.

Da qui si comincia a capire l'importanza degli operatori hermitiani, i cui autovalori, pur potendo avere sia uno spettro discreto, sia uno spettro continuo, sono comunque sempre numeri reali.<sup>4</sup>



### 6.1.4 POSTULATO 4 – IL POTERE DI PREVISIONE

Supponiamo che il sistema si trovi nello stato  $\Psi$  conosciuto e che si effettui la misura della osservabile  $\hat{A}$ . Quale sarà il risultato? Qui entra in gioco in maniera pesante il carattere strutturalmente probabilistico della MQ.

Dice infatti il postulato 4 che *quella che noi possiamo prevedere è solo la probabilità, per ciascuno dei risultati possibili.*

In storia e filosofia della scienza si distingue tra:

- *probabilità di natura epistemica* quando si vuole sottolineare che la probabilità è frutto di una insufficiente conoscenza dello stato iniziale (si veda il caso della meccanica e della termodinamica statistica)
- *probabilità di natura non epistemica* quando si vuole sottolineare il fatto che l'uso della probabilità ha natura strutturale e non ha a che fare con insufficiente conoscenza delle condizioni iniziali; ovvero la teoria ha natura strutturalmente probabilistica. In meccanica quantistica si ha a che fare con probabilità di natura non epistemica connaturate alle leggi della teoria, oltre che, sul piano sperimentale, agli ovvi problemi della ordinaria teoria degli errori. Per questa ultima ragione, nel principio di indeterminazione è presente l'operatore aritmetico  $\geq$  e non  $=$ .

Per la precisione, se indichiamo con  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  l'insieme finito dei possibili risultati e con  $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle\}$  i corrispondenti auto-vettori allora:

$$p(\lambda_i) = |\langle \varphi_i | \Psi \rangle|^2 \quad (\text{VI.6.1})^5$$

<sup>3</sup> Per ragioni di economia si usa spesso il termine osservabile sia per indicare la grandezza fisica sia per l'operatore

<sup>4</sup> Da qui in avanti, per non appesantire inutilmente la trattazione e in modo che ne vengano ben compresi gli aspetti di natura concettuale ci limiteremo al caso di spettro discreto, finito o infinito. Il passaggio al continuo si farà con l'uso degli integrali al posto delle serie.

Tenuto conto della definizione di valor medio di un operatore possiamo allora definire il valore atteso di  $\hat{A}$  rispetto allo stato  $\Psi$  come somma dei possibili valori  $\lambda$  moltiplicati per le corrispondenti probabilità:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i p(\lambda_i) \quad (\text{VI.6.2})$$

### 6.1.5 POSTULATO 5 - COSA ACCADE QUANDO SI MISURA?



Questo postulato rappresenta l'aspetto più paradossale della meccanica quantistica, il cosiddetto *collasso del pacchetto d'onda*.

Quando facciamo una misura non sappiamo se non in maniera probabilistica quale risultato otterremo. Supponiamo di effettuare la misura e di ottenere il risultato  $\lambda_i$  a cui corrisponde l'autovettore  $|\varphi_i\rangle$ .

Per effetto della misura, la funzione  $|\Psi\rangle$  cessa di essere caratterizzata da una sovrapposizione di stati e assume istantaneamente il valore  $|\varphi_i\rangle$  e a questo punto (nuova condizione iniziale) il sistema evolve nel rispetto della equazione Schrödinger.

Il collasso della funzione di stato fa sì che se si ripete immediatamente la misura si trova nuovamente  $\lambda_i$  nel rispetto del fatto che la funzione di stato, ora è  $|\varphi_i\rangle$ .

Il collasso del pacchetto d'onde, cioè l'istantanea trasformazione del vettore di stato (combinazione lineare delle autofunzioni) in un particolare autovettore è uno dei postulati più controversi sul piano epistemologico perché si passa da una condizione potenziale di stati, anche tra loro contraddittori, ad un particolare stato non più rappresentato da una combinazione lineare (da una realtà potenziale di natura epistemica che rimane tale sinché non si fa una misura ad una realtà effettiva).

Si pensi per esempio al ben noto paradosso del gatto di Schrödinger che risulta vivo o morto dentro una scatola dove un processo radioattivo potrebbe aver attivato la rottura di una fiala di cianuro e che rimane tale sino al momento della osservazione (apertura della scatola) e allora risulta solo vivo o solo morto.

Le problematiche della indeterminazione nella misura simultanea di grandezze non compatibili nasce da qui.

Infatti se due osservabili non commutano esse non hanno nemmeno una comune base di autofunzioni. Così se dopo la misura della osservabile  $\hat{A}$  lo stato è collassato in  $|\varphi_i\rangle$  l'autovettore corrispondente al valore misurato  $\lambda_i$  nulla si può prevedere con certezza se si esegue la misura della osservabile  $\hat{B}$  perché  $|\varphi_i\rangle$  non fa parte degli autovettori di  $\hat{B}$  e dunque lo stato, rispetto a  $\hat{B}$  risulterà essere la combinazione lineare dei suoi autovettori riaprendo le porte alla mancanza di potere predittivo.

---

<sup>5</sup> Nel caso di autovalori degeneri, quelli cioè che producono più autovalori ortogonali distinti, si fa la somma. Si suppone che i vettori  $\varphi$  siano già stati normalizzati e lo stesso sia stato fatto per la funzione di stato, condizione essenziale quando ci sono di mezzo le probabilità.

L'argomento sarà ripreso nel prossimo paragrafo in cui si effettuerà la dimostrazione generale del principio di indeterminazione correlandolo agli operatori non commutativi.



### 6.1.6 POSTULATO 6 – L'EVOLUZIONE TEMPORALE DI $\Psi$

Il vettore  $\Psi$  evolve nel tempo rispettando la equazione di Schrödinger scritta con l'uso dell'operatore hamiltoniano, un operatore correlato alla energia del sistema e che si sa sempre costruire:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (\text{VI.6.3})$$

L'evoluzione è completamente deterministica nel rispetto del principio di sovrapposizione sino alla prossima misura quando avverrà un nuovo collasso della funzione d'onda.

Dato lo scopo puramente informativo di questo capitolo non verranno effettuati i conti sulla evoluzione temporale della funzione di stato che è già stato accennato nel capitolo 0605.

## 6.2 Considerazioni sulla commutatività e sul principio di indeterminazione

Come vedremo tra breve il principio di indeterminazione di Heisenberg, una vera e propria legge generale di natura, può essere dedotto nell'ambito delle teoria assiomatica.

Questa deducibilità non ne sminuisce il rango: è la teoria assiomatica che è stata faticosamente costruita in modo di essere una teoria completa e dunque di avere al suo interno il principio di indeterminazione che, ricordiamolo, è stato enunciato da Heisenberg nel 1927 come legge generale di natura.

Non solo il principio di indeterminazione è interno alla teoria ma, negli ultimi anni, si è acclarato che esso non va spiegato partendo dalla azione di disturbo dell'osservatore sul sistema osservato (come si fa, a volte e indebitamente, per spiegarne l'origine).

Un'altra domanda da porsi è quella sulle ragioni che hanno portato a dare una struttura assiomatica alla teoria. La risposta sta nel fatto che le teorie assiomatiche sono altamente predittive e consentono un controllo su base logico-matematica della eliminazione completa di aspetti di natura contraddittoria eventualmente interni alla teoria.

A partire dai primi decenni del 900 tutte le *scienze dure* sono state sottoposte ad un processo di revisione di natura assiomatica e il gran maestro di questo processo è stato proprio David Hilbert.

### 6.2.1 INDETERMINAZIONI CLASSICHE E QUANTISTICHE DI UNA OSSERVABILE

Classicamente data una osservabile  $A$ , con il simbolo  $\Delta A$ , incertezza su  $A$ , si intende lo sparpagliamento di valori quando si seguono misure ripetute di una stessa grandezza in uguali condizioni sperimentali.

Se si sa che una certa grandezza può dare una serie di risultati  $a_i$ , ciascuno con probabilità  $p_i$  e si definisce *valore atteso di  $A$* :

$$\langle A \rangle = \sum a_i p_i \quad (\text{VI.6.4})$$

Mentre la varianza  $\sigma$  è definita attraverso lo scarto quadratico medio:

$$\sigma^2 = \sum (a_i - \langle A \rangle)^2 p_i \quad (\text{VI.6.5})$$

Ma lo scarto quadratico medio quasi sempre viene calcolato attraverso la relazione che correla la media dei quadrati al quadrato della media; infatti:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum (a_i - \langle A \rangle)^2 p_i = \sum (a_i^2 - 2 a_i \langle A \rangle + \langle A \rangle^2) p_i = \\ &= \sum (a_i^2 p_i) + \langle A \rangle \sum -2 a_i p_i + \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto delle definizioni e del fatto che la somma delle probabilità fa 1. Dunque:

$$\sigma^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \quad (\text{VI.6.6})$$

Ricordiamo a chi non pratici la statistica che la varianza  $\sigma$  è un indice di dispersione delle misure intorno al valor medio ed è la base di qualsiasi elaborazione sperimentale e statistica.



La dimensione quantitativo sperimentale della MQ si basa sulla interpretazione frequentista della probabilità; pertanto si ottiene una relazione simile sull'indice di dispersione indicato con  $\Delta_\psi A$ .

Si ricordi che il valore atteso è calcolato attraverso il prodotto scalare; dunque;

$$\Delta_\psi A = \sigma = \sqrt{\langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^2} \quad (VI.6.7)$$

Rispetto al caso classico ci sono due elementi da sottolineare:

- l'indice di dispersione dipende dallo stato
- se  $\psi$  è un autovettore di  $\hat{A}$  allora la dispersione è nulla in virtù di uno dei postulati (e vale anche il viceversa).

## 6.2.2 LA TEORIA E IL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE

### 6.2.2.1 la disuguaglianza che genera il principio di indeterminazione



#### Teorema

- Se indichiamo con  $O_1$  e  $O_2$  due generiche osservabili e indichiamo con  $\hat{O}_1$  e  $\hat{O}_2$  i corrispondenti operatori vale la seguente disuguaglianza:
- $\Delta_\psi O_1 \cdot \Delta_\psi O_2 \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | [\hat{O}_1, \hat{O}_2] | \psi \rangle \right| \quad (VI.6.8)$

#### dimostrazione <sup>6</sup>

Indichiamo con  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  due operatori ausiliari legati allo scarto e così definiti:

$$\hat{A} = \hat{O}_1 - \langle O_1 \rangle_\psi \hat{1} \quad \text{e} \quad \hat{B} = \hat{O}_2 - \langle O_2 \rangle_\psi \hat{1}$$

allora

$$\begin{aligned} (\Delta_\psi O_1)^2 &= \langle (O_1 - \langle O_1 \rangle_\psi)^2 \rangle_\psi = \langle A^2 \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle = \\ &= \langle \psi | \hat{A} | \hat{A} | \psi \rangle = \|\hat{A}\psi\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Analogamente } (\Delta_\psi O_2) = \|\hat{B}\psi\|$$

Inoltre:

$$[\hat{O}_1, \hat{O}_2] = [\hat{A}, \hat{B}] \text{ perché l'operatore unità commuta con tutto.}$$

Dunque la tesi è rinviata alla dimostrazione che

$$\|\hat{A}\psi\| \cdot \|\hat{B}\psi\| \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle \right|$$

Se utilizziamo la disuguaglianza di Schwartz avremo che:

$$\|\hat{A}\psi\| \cdot \|\hat{B}\psi\| \geq \left| \langle \hat{A}\psi | \hat{B}\psi \rangle \right| = \left| \langle \psi | \hat{A} \hat{B} | \psi \rangle \right|$$

$$\Delta_\psi O_1 \cdot \Delta_\psi O_2 \geq \left| \langle \psi | \hat{A} \hat{B} | \psi \rangle \right|$$

Se ora consideriamo l'anti commutatore  $[\hat{A}, \hat{B}]_+$  e cioè  $\hat{A} \hat{B} + \hat{B} \hat{A}$

<sup>6</sup> Nella dimostrazione, a seconda del contesto e senza rischio di confusione, i due simboli  $\langle \rangle$  rappresentano il valore atteso e il prodotto scalare

avremo che:

$$\hat{A} \hat{B} = \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]_+ + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]$$

E dunque:

$$\Delta_\psi O_1 \cdot \Delta_\psi O_2 \geq \left| \langle \psi | [\frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]_+ + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]] \psi \rangle \right| =$$

$$\left| \langle \psi | [\frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]_+] \rangle + \langle \psi | \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

ma per quanto dimostrato, in uno degli esercizi finali al termine del capitolo precedente, il primo termine è puramente reale mentre il secondo è puramente immaginario

dunque poiché  $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$  ne segue che

$$\Delta_\psi O_1 \cdot \Delta_\psi O_2 \geq \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{2} \sqrt{a^2} = \frac{1}{2} \left| \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| =$$

$$\frac{1}{2} \left| \langle \psi | [\hat{O}_1, \hat{O}_2] \psi \rangle \right|$$

Dunque resta dimostrato che

$$\Delta_\psi O_1 \cdot \Delta_\psi O_2 \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | [\hat{O}_1, \hat{O}_2] \psi \rangle \right|$$

Il prodotto delle indeterminazioni di due osservabili non può essere minore di una quantità dipendente dal commutatore e si annulla solo quando i due operatori commutano.

Il risultato merita qualche parola di commento:

- la indeterminazione non deriva da limiti di natura sperimentale ma è strettamente connessa alla teoria
- il commutatore tra grandezze osservabili le divide in due grandi categorie correlate a coppie: quelle che commutano che non hanno limiti al livello di conoscibilità della natura e quelle che non commutano per le quali il prodotto delle dispersioni non può essere reso piccolo a piacere.

### 6.2.2.2 Il commutatore di posizione e quantità di moto

lemma sul commutatore di posizione e quantità di moto

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i \hbar \tag{VI.6.9}$$

dimostrazione

Si fa riferimento alla tabella VI.6.1 con gli operatori di uso comune ricordando che  $\hat{p}_x = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x}$  e che gli operatori si applicano dal più interno al più esterno.

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]f = (\hat{x} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x})f = -i \hbar \frac{\partial f}{\partial x} x + i \hbar \frac{\partial (xf)}{\partial x} =$$

$$= -i \hbar \frac{\partial f}{\partial x} x + i \hbar [x \frac{\partial f}{\partial x} + f] = i \hbar f$$

### 6.2.2.3 Il principio di indeterminazione

Se inseriamo nella relazione (VI.6.8) al posto del commutatore generale quello della posizione e della quantità di moto (VI.6.9) otteniamo che: <sup>7</sup>

<sup>7</sup> Nel prodotto scalare scompare la funzione di stato che è normalizzata.



$$\Delta_{\psi} x \cdot \Delta_{\psi} p_x \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (\text{VI.6.10})$$

Ovvero la espressione classica del principio di indeterminazione di Heisenberg

Ovviamente la stessa relazione riguarda le altre due coordinate spaziali e le rispettive componenti della quantità di moto.

Si potranno ottenere relazioni analoghe per tutte le coppie di osservabili che non commutano come vedremo nel prossimo paragrafo con riferimento al momento angolare.

.

## 6.3 Il momento angolare

Il momento angolare gioca in meccanica quantistica un ruolo di tutto rilievo per due ragioni:

- perché la legge di conservazione del momento angolare costituisce una delle leggi che esprimono proprietà generali dello spazio tempo (in questo caso la isotropia dello spazio che corrisponde alla invarianza per rotazione),
- perché su scala microscopica il momento angolare è uno degli elementi caratterizzanti, attraverso i numeri quantici, la costruzione della tavola dei diversi elementi. Se ne è già accennato, nel capitolo precedente, trattando del modello di Bohr Sommerfeld.

Si consiglia, come premessa alla lettura di questa parte, di rileggere il capitolo 8 della V parte, dedicato al magnetismo della materia. Gli elementi essenziali relativi al momento angolare, al suo legame con il momento magnetico e allo spin sono già presentati in quella sede in maniera sintetica. Qui se ne analizzano le implicazioni e la derivazione alla luce della meccanica quantistica.

Classicamente il momento angolare è un vettore definito come prodotto vettoriale tra il vettore posizione e il vettore quantità di moto e le sue componenti si trovano attraverso il determinante simbolico:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \quad (\text{VI.6.11})$$

$$\vec{L} = \vec{i} (y p_z - z p_y) + \vec{j} (z p_x - x p_z) + \vec{k} (x p_y - y p_x)$$

Quando si passa in MQ i corrispondenti operatori hermitiani sono costruiti semplicemente per sostituzione:

$$\begin{cases} \hat{L}_x = \hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y \\ \hat{L}_y = \hat{z} \hat{p}_x - \hat{x} \hat{p}_z \\ \hat{L}_z = \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x \end{cases} \quad (\text{VI.6.12})$$

o in forma esplicita, visto che  $\hat{p}_w = -i\hbar \frac{\partial}{\partial w}$

$$\hat{L}_x = \hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y = i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{VI.6.13})$$

e così via.

### 6.3.1 IL MOMENTO ANGOLARE È UN OPERATORE HERMITIANO

**Teorema**

$$\hat{L}_w^\dagger = \hat{L}_w \text{ con } w \in \{x, y, z\}$$

**dimostrazione**

Scegliamo per la dimostrazione una delle tre variabili, per esempio z

$$\hat{L}_z^\dagger = (\hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x)^\dagger = (\hat{x} \hat{p}_y)^\dagger - (\hat{y} \hat{p}_x)^\dagger = \hat{p}_y^\dagger \hat{x}^\dagger - \hat{p}_x^\dagger \hat{y}^\dagger$$

Ma gli operatori posizione e quantità di moto sono hermitiani e dunque:

$\hat{L}_z^\dagger = \hat{p}_y \hat{x} - \hat{p}_x \hat{y}$  ma poiché gli operatori posizione e componente della quantità di moto relativi a variabili diverse commutano:

$$\hat{L}_z^\dagger = \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x = \hat{L}_z$$

Si procede allo stesso modo per le altre componenti e dunque si può concludere che la componente singola del momento angolare è una osservabile che dà luogo ad autovalori reali e dunque, singolarmente presa, si tratta di una grandezza misurabile ma non è così per quanto riguarda la misura simultanea delle tre componenti come vedremo tra breve.

### 6.3.2 LE COMPONENTI DEL MOMENTO ANGOLARE NON COMMUTANO

Supponiamo di voler misurare il momento angolare di una particella; la cosa sarà possibile, in base al principio di indeterminazione solo se le tre componenti commutano. Ma, come vedremo tra breve, ciò non accade e dunque le tre equazioni agli autovalori non hanno una base di autovettori comune.

Dunque il momento angolare *ha realtà fisica ma non è misurabile* simultaneamente (le tre componenti hanno realtà, sono misurabili ma non lo sono contemporaneamente).

#### Teorema

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z \text{ e analogamente per } y,z,x \text{ e } z,x,y$$

#### Dimostrazione

La dimostrazione è di tipo diretto

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x$$

Tenendo conto che  $i^2 = -1$  e che  $\hat{L}_x = i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) \dots$

$$\begin{aligned} \hat{L}_x \hat{L}_y &= -\hbar^2 \left( z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right) =^8 \\ &= -\hbar^2 \left( z \frac{\partial}{\partial y} x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} z \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z} x \frac{\partial}{\partial z} + y \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial x} \right) = \\ &= -\hbar^2 \left( zx \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - z^2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - yx \frac{\partial^2}{\partial z^2} + yz \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + y \frac{\partial}{\partial x} \right)^9 \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\hat{L}_y \hat{L}_x = -\hbar^2 \left( zy \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - z^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - xy \frac{\partial^2}{\partial z^2} + xz \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} + x \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

<sup>8</sup> Attenzione si tratta di un prodotto di operatori il che significa che  $z \frac{\partial}{\partial y} x \frac{\partial}{\partial z}$  significa che la prima derivata  $\frac{\partial}{\partial y}$  viene applicata al prodotto  $x \frac{\partial}{\partial z}$  e tutti i termini del tipo  $\frac{\partial}{\partial y} x$  si annullano e non compaiono nel risultato tranne l'ultimo  $\frac{\partial}{\partial z} z = 1$

<sup>9</sup> Prestare attenzione al quinto termine

ma le operazioni di derivazione rispetto a variabili indipendenti sono commutative e dunque  $zx \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} = zx \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}$  e così via.

Così quando si calcola il commutatore si elidono per differenza i primi quattro termini e si ottiene:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x = -\hbar^2 \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) = i\hbar \hat{L}_z$$

Dunque il commutatore è diverso da zero ed è proporzionale all'altra componente:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z \tag{VI.6.14}$$

Naturalmente, permutando le variabili:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$$

Il valore del commutatore, in base al principio di indeterminazione ha una immediata conseguenza:

$$\Delta \hat{L}_x \cdot \Delta \hat{L}_y \geq \frac{1}{2} \hbar | \hat{L}_z | \tag{VI.6.15}$$

Il fatto che due su tre delle componenti del momento angolare non siano determinabili simultaneamente fa sì che le proprietà quantistiche del momento angolare riguarderanno sempre solo una delle tre componenti che potrà essere scelta arbitrariamente.

### 6.3.2.1 Alcune utili proprietà dei commutatori

La relazione (VI.6.14) oltre che per via diretta può anche essere dimostrata per via formale utilizzando alcune proprietà dei commutatori che si dimostrano in via immediata applicando la definizione.

Le richiamiamo qui di seguito:

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}] &= -[\hat{B}, \hat{A}] \text{ antisimmetria} \\ [\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}] \text{ linearità} \\ [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] \text{ distributività} \\ [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \end{aligned} \tag{VI.6.16}$$

### 6.3.2.2 Dimostrazione formale del commutatore tra le componenti del momento angolare

La dimostrazione che segue è da considerare alla stregua di un semplice esercizio e la propongo per abituare il lettore all'utilizzo delle proprietà formali.

Poiché nella dimostrazione si utilizzano i commutatori delle osservabili posizione e quantità di moto le richiamiamo qui di seguito enunciandole per una sola coppia delle tre possibilità (xy, yz, xz):

$$[\hat{y}, \hat{p}_z] = [\hat{y}, \hat{y}] = [\hat{p}_z, \hat{p}_z] = 0 \quad [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar \tag{VI.6.17}$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z] = \text{per la linearità}$$



Le componenti del momento angolare a due a due non commutano e la loro indeterminazione dipende dalla terza componente

Proprietà importanti del commutatore

Proprietà importanti del commutatore

$$= [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] - [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_z] - [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x] + [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z]^{10}$$

Calcoliamo ora separatamente i diversi termini:

$$\begin{aligned} [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] &= \hat{y} [\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] + [\hat{y}, \hat{z}\hat{p}_x]\hat{p}_z = \\ &= \hat{y} \{[\hat{p}_z, \hat{z}]\hat{p}_x + \hat{z} [\hat{p}_z, \hat{p}_x]\} + \{[\hat{y}, \hat{z}]\hat{p}_x + \hat{z} [\hat{y}, \hat{p}_x]\}\hat{p}_z = \\ &= \hat{y} \{-i\hbar \hat{p}_x + \hat{z} 0\} + \{0 \hat{p}_x + \hat{z} 0\}\hat{p}_z = -i\hbar \hat{y} \hat{p}_x \odot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_z] &= [\hat{y}, \hat{x}\hat{p}_z]\hat{p}_z + \hat{y} [\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_z] = \\ &= \{[\hat{y}, \hat{x}]\hat{p}_z + \hat{x} [\hat{y}, \hat{p}_z]\}\hat{p}_z + \hat{y} \{[\hat{p}_z, \hat{x}]\hat{p}_z + \hat{x} [\hat{p}_z, \hat{p}_z]\} = \\ &= \{0 \hat{p}_z + \hat{x} 0\}\hat{p}_z + \hat{y} \{0 \hat{p}_z + \hat{x} 0\} = 0 \odot \end{aligned}$$

$$[\hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x] = \dots = 0 \odot$$

$$\begin{aligned} [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z] &= [\hat{z}, \hat{x}\hat{p}_z]\hat{p}_y + \hat{z} [\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z] = \\ &= \{[\hat{z}, \hat{x}]\hat{p}_z + \hat{x} [\hat{z}, \hat{p}_z]\}\hat{p}_y + \hat{z} \{[\hat{p}_y, \hat{x}]\hat{p}_z + \hat{p}_z [\hat{x}, \hat{p}_z]\} = \\ &= \{0 \hat{p}_z + \hat{x} i\hbar\}\hat{p}_y + \hat{z} \{0 \hat{p}_z + \hat{p}_z 0\} = i\hbar \hat{x} \hat{p}_y \odot \end{aligned}$$

dunque:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{x} \hat{p}_y - i\hbar \hat{y} \hat{p}_x = i\hbar (\hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x) = i\hbar \hat{L}_z \odot$$

### 6.3.3 IL MODULO DEL MOMENTO ANGOLARE

Un'altra bizzarria del momento angolare sta nel fatto che, nonostante le sue tre componenti non siano determinabili simultaneamente il modulo di tale osservabile è perfettamente calcolabile e infatti, nei calcoli di quantizzazione in MQ lo si associa solitamente alla componente lungo l'asse z (tale scelta è del tutto arbitraria e la consuetudine deriva dal fatto che in coordinate sferiche l'asse z risulta più maneggevole).

Consideriamo dunque l'operatore

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \tag{VI.6.18}$$

**Teorema**

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$$

**dimostrazione**

$[\hat{L}_z^2, \hat{L}_z] = 0$  perché in generale  $[\hat{A}^2, \hat{A}] = 0$ <sup>11</sup> e dunque

$$\begin{aligned} [\hat{L}^2, \hat{L}_z] &= [\hat{L}_x^2, \hat{L}_z] + [\hat{L}_y^2, \hat{L}_z] = \\ &= \hat{L}_x [\hat{L}_x, \hat{L}_z] + [\hat{L}_x, \hat{L}_z] \hat{L}_x + \hat{L}_y [\hat{L}_y, \hat{L}_z] + [\hat{L}_y, \hat{L}_z] \hat{L}_y = \\ &= \hat{L}_x (-i\hbar \hat{L}_y) + \hat{L}_x (-i\hbar \hat{L}_y) + \hat{L}_y (i\hbar \hat{L}_x) + (i\hbar \hat{L}_x) \hat{L}_y = 0 \end{aligned}$$

Si tiene ora conto della relazione (VI.6.14) e si ha:

<sup>10</sup> Ora si applicano le proprietà distributive

<sup>11</sup> Basta usare le (6.16) e il fatto che  $[\hat{A}, \hat{A}] = 0$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = -\hat{L}_x \hat{L}_y i\hbar - \hat{L}_y \hat{L}_x i\hbar + \hat{L}_y \hat{L}_x i\hbar + \hat{L}_x \hat{L}_y i\hbar = 0$$

Dunque:

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0 \tag{VI.6.19}$$

Dopo aver stabilito che esiste una compatibilità tra modulo e componente ci chiediamo ora quali siano i valori che queste grandezze possono assumere e la risposta a questa domanda è anche la risposta alla importanza del momento angolare in M.Q.



### 6.3.4 AUTOVALORI E AUTOVETTORI DEL MOMENTO ANGOLARE

Trattando di scienza divulgativa siamo stati abituati a scrivere i numeri quantici e a trattare il II e III come proprietà dipendenti dal momento angolare senza sapere bene da dove venissero quegli strani numeri, che poi venivano associati al momento magnetico.

$$L^2 = l(l + 1) \hbar^2 \text{ con } l = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \tag{VI.6.20}$$

$$L_z = m \hbar \text{ con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, l \tag{VI.6.21}$$

Inoltre quando si è in presenza di campi caratterizzati da una funzione potenziale di tipo centrale (cioè in cui le forze dipendono solo dalla distanza e sono dirette lungo la congiungente) accade che la Hamiltoniana del sistema risulti commutativa con  $\hat{L}^2$  e  $\hat{L}_z$  e dunque le tre osservabili presentano autovettori costituenti una base comune.<sup>12</sup>

È giunto il momento di svelare l'arcano. Si tratta di risolvere le equazioni agli autovalori che riguardano il momento angolare. La determinazione è concettualmente semplice, ma abbastanza faticosa dal punto di vista tecnico ed utilizza in funzione strumentale due operatori di *shift* di cui inizieremo dandone definizione e proprietà.

#### 6.3.4.1 Il ladder operator

Il calcolo degli autovalori e degli autovettori è eseguibile in maniera semi-elementare attraverso la introduzione di due *operatori ad hoc* detti *ladder operator* (operatori di scala) che, alla luce delle proprietà che ci apprestiamo a dimostrare chiameremo più semplicemente operatori di shift.

Infatti, dati  $\hat{L}^2$  e  $\hat{L}_z$  tali operatori hanno la proprietà di conservare o far crescere e decrescere di  $\hbar$  gli autovalori delle corrispondenti equazioni con le limitazioni su valori massimi e minimi che andremo a determinare.

Essi sono definiti attraverso  $\hat{L}_x$  e  $\hat{L}_y$ ; per la precisione si pone:

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}_+ &= \hat{L}_x + i\hat{L}_y \\ \hat{L}_- &= \hat{L}_x - i\hat{L}_y \end{aligned} \right\} \tag{VI.6.22}$$

Tra le altre cose l'utilizzo di questi operatori consente anche di trovare agevolmente gli autovalori e autovettori dell'oscillatore armonico.



Gli operatori di shift

<sup>12</sup> Questo punto non viene qui dimostrato ma serve come giustificazione della scelta di procedere almeno al calcolo di autovettori e autovalori del momento angolare.

### 6.3.4.1.1 Gli operatori di shift non sono hermitiani

In effetti:

$$\hat{L}_+^\dagger = (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)^\dagger = \hat{L}_x^\dagger - i\hat{L}_y^\dagger = \hat{L}_x - i\hat{L}_y = \hat{L}_-^{13}$$

$$\hat{L}_-^\dagger = (\hat{L}_x - i\hat{L}_y)^\dagger = \hat{L}_x^\dagger + i\hat{L}_y^\dagger = \hat{L}_x + i\hat{L}_y = \hat{L}_+$$

Dunque, per quanto riguarda l'aggiunto gli operatori di shift si trasformano l'uno nell'altro, non sono hermitiani e dunque non vale per essi il teorema sugli autovalori reali.

### 6.3.4.1.2 Gli operatori di shift e il commutatore con il momento angolare

$$\begin{aligned} [\hat{L}_+, \hat{L}_z] &= [\hat{L}_x, \hat{L}_z] + i[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = -i\hbar\hat{L}_y + i^2\hbar\hat{L}_x = -i\hbar\hat{L}_y - \hbar\hat{L}_x = \\ &= -\hbar\hat{L}_+ \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra la relazione sul commutatore di  $\hat{L}_-$  e si può concludere che:

$$\left. \begin{aligned} [\hat{L}_+, \hat{L}_z] &= -\hbar\hat{L}_+ \\ [\hat{L}_-, \hat{L}_z] &= \hbar\hat{L}_- \end{aligned} \right\} \quad \text{(VI.6.23)}$$

Dunque gli operatori di shift non commutano con  $\hat{L}_z$  e il commutatore rinvia all'operatore; si dimostra invece in maniera semplice che gli operatori di shift commutano con  $\hat{L}^2$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0 \quad \text{(VI.6.24)}$$

In effetti  $\hat{L}^2$  commuta con tutte le componenti del momento angolare e poiché gli operatori di shift sono costruiti attraverso combinazioni lineari di esse ne segue la commutatività.

### 6.3.4.2 Il legame tra gli autovalori dei 4 operatori – gli operatori di shift traslano gli autovalori di $\hat{L}_z$

Poiché  $\hat{L}^2$  e  $\hat{L}_z$  commutano essi condividono una medesima base di autovettori; per comodità di rappresentazione indichiamo l'autovettore comune che rinvia all'autovalore  $\lambda_L$  di  $\hat{L}^2$  e  $\lambda_z$  di  $\hat{L}_z$  con il ket  $|\lambda_L, \lambda_z\rangle$ ; sarà pertanto

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}^2 |\lambda_L, \lambda_z\rangle &= \lambda_L |\lambda_L, \lambda_z\rangle \\ \hat{L}_z |\lambda_L, \lambda_z\rangle &= \lambda_z |\lambda_L, \lambda_z\rangle \end{aligned} \right\} \quad \text{(VI.6.25)}$$

#### 6.3.4.2.1 Gli operatori di shift non influenzano gli autovalori di $\hat{L}^2$

Applichiamo ora alla prima delle (6.25) gli operatori di shift che, come abbiamo visto commutano con  $\hat{L}^2$  e indichiamo con  $\hbar^2 p$  l'autovalore

<sup>13</sup> Quando si passa all'aggiunto si prende il coniugato dei numeri complessi; inoltre  $\hat{L}_x$  e  $\hat{L}_y$  sono hermitiani

di  $\hat{L}^2$  con autovettore  $|\lambda_L, \lambda_z\rangle$ . Si è introdotta la costante dimensionale  $\hbar^2$  e in questo modo  $p$  è una costante adimensionale. Scriveremo dunque

$$\hat{L}_\pm \hat{L}^2 |\lambda_L, \lambda_z\rangle = \hat{L}^2 \hat{L}_\pm |\lambda_L, \lambda_z\rangle = \hat{L}_\pm \hbar^2 p |\lambda_L, \lambda_z\rangle \quad (\text{VI.6.26})$$

Ovvero, con riferimento all'autovettore  $|\lambda_L, \lambda_z\rangle$ ,  $\hat{L}_\pm$  e  $\hat{L}^2$  condividono il medesimo autovalore.

### 6.3.4.2.2 Gli operatori di shift traslano di $\hbar$ in più e in meno gli autovalori di $\hat{L}_z$

Vediamo ora cosa accade con  $\hat{L}_z$  separatamente per  $\hat{L}_+$  e  $\hat{L}_-$  e indichiamo con  $\hbar m$  l'autovalore di  $\hat{L}_z$  con autovettore  $|\lambda_L, \lambda_z\rangle$ .

$$\hat{L}_+ \hat{L}_z |\lambda_L, \lambda_z\rangle = \hbar m \hat{L}_+ |\lambda_L, \lambda_z\rangle \quad (\text{VI.6.27})$$

Questa volta non possiamo commutare perché in base alla (VI.23):

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_z] = -\hbar \hat{L}_+ \text{ ma possiamo ricavare } \hat{L}_+ \hat{L}_z = \hat{L}_z \hat{L}_+ - \hbar \hat{L}_+ \text{ e sostituire nella (6.27)}$$

$$(\hat{L}_z \hat{L}_+ - \hbar \hat{L}_+) |\lambda_L, \lambda_z\rangle = \hat{L}_z \hat{L}_+ |\lambda_L, \lambda_z\rangle - \hbar \hat{L}_+ |\lambda_L, \lambda_z\rangle = \hbar m \hat{L}_+ |\lambda_L, \lambda_z\rangle$$

Da cui:

$$\hat{L}_z \hat{L}_+ |\lambda_L, \lambda_z\rangle = \hbar(m+1) \hat{L}_+ |\lambda_L, \lambda_z\rangle \quad (\text{VI.6.28})$$

La (6.28) ci dice che:  $\hat{L}_+ |\lambda_L, \lambda_z\rangle$  è un autovettore di  $\hat{L}_z$  con autovalore  $\hbar(m+1)$  ovvero la applicazione di  $\hat{L}_+$  su un autovettore di  $\hat{L}_z$  ne produce un altro aumentato di  $\hbar$ . Di qui il nome di *operatore di shift*.

La stessa cosa, ripetendo esattamente i medesimi conti, per via della differenza di segno nelle (6.23) porta al risultato in decremento:

$$\hat{L}_z \hat{L}_- |\lambda_L, \lambda_z\rangle = \hbar(m-1) \hat{L}_- |\lambda_L, \lambda_z\rangle \quad (\text{VI.6.29})$$

Dunque abbiamo trovato un algoritmo che ci consente di far crescere e decrescere liberamente gli autovalori di  $\hat{L}_z$  ed è naturale porsi la domanda se il doppio processo abbia un limite inferiore e uno superiore.

### 6.3.4.3 Due relazioni utili per delimitare gli autovalori del momento angolare

Per determinare le limitazioni sugli autovalori utilizzeremo due relazioni di semplice dimostrazione; precisamente:

Lemma

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}^2 &= \hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar \hat{L}_z \\ \hat{L}^2 &= \hat{L}_- \hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar \hat{L}_z \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.6.30})$$

dimostrazione

La dimostrazione è di tipo diretto e si basa sulla definizione degli operatori di shift.

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ \hat{L}_- &= (\hat{L}_x + i \hat{L}_y)(\hat{L}_x - i \hat{L}_y) = \hat{L}_x^2 - i \hat{L}_x \hat{L}_y + i \hat{L}_y \hat{L}_x + \hat{L}_y^2 = \\ &= (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2) - i(\hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x) = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - i(i \hbar \hat{L}_z) = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar \hat{L}_z \end{aligned}$$

da cui:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar \hat{L}_z$$

La seconda relazione si dimostra allo stesso modo.

### 6.3.4.4 Le limitazioni sugli autovalori del momento angolare

Osserviamo in primo luogo che vale una relazione che ci dice che, anche in ambito quantistico, le componenti di un vettore sono sempre minori o eguali al modulo del vettore. Infatti da:

$$\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2$$

segue che, passando ai valori attesi degli operatori, e ricordando che si tratta di autovettori normalizzati e che  $\hat{L}_x$  e  $\hat{L}_y$  sono hermitiani:

i termini di sinistra portano agli autovalori  $\lambda_L$  e  $\lambda_z$  mentre i termini a destra sono positivi o nulli essendo norme al quadrato:

$$\langle \lambda_L, \lambda_z | \hat{L}^2 | \lambda_L, \lambda_z \rangle - \langle \lambda_L, \lambda_z | \hat{L}_z^2 | \lambda_L, \lambda_z \rangle = \langle \lambda_L, \lambda_z | \hat{L}_x^2 | \lambda_L, \lambda_z \rangle + \langle \lambda_L, \lambda_z | \hat{L}_y^2 | \lambda_L, \lambda_z \rangle \Leftrightarrow$$

$$\lambda_L - \lambda_z^2 = \langle \lambda_L, \lambda_z | \hat{L}_x | \hat{L}_x | \lambda_L, \lambda_z \rangle + \langle \lambda_L, \lambda_z | \hat{L}_y | \hat{L}_y | \lambda_L, \lambda_z \rangle \geq 0$$

E possiamo concludere che:

$$\sqrt{\lambda_L} \geq \lambda_z \tag{VI.6.31}$$

Poniamo ci ora il problema della limitatezza degli autovalori; il processo di crescita previsto dalla applicazione degli operatori di shift potrà avere un termine se, ad un certo punto, in corrispondenza di un autovettore, che chiameremo  $|\psi_{MAX}\rangle$ , accadrà che:

$$\hat{L}_+ |\psi_{MAX}\rangle = |0\rangle$$

E analogamente (per i decrementi) se esisterà uno  $|\psi_{MIN}\rangle$  per il quale:

$$\hat{L}_- |\psi_{MIN}\rangle = |0\rangle$$

Se ora applichiamo a  $|\psi_{MAX}\rangle$  la seconda delle (6.30) otterremo:

$$\hat{L}^2 |\psi_{MAX}\rangle = \hat{L}_- \hat{L}_+ |\psi_{MAX}\rangle + \hat{L}_z^2 |\psi_{MAX}\rangle + \hbar \hat{L}_z |\psi_{MAX}\rangle$$

$\lambda_L |\psi_{MAX}\rangle = |0\rangle + \lambda_{zMAX}^2 |\psi_{MAX}\rangle + \hbar \lambda_{zMAX} |\psi_{MAX}\rangle$  e dunque la relazione:

$$\lambda_{zMAX}^2 + \hbar \lambda_{zMAX} - \lambda_L = 0 \tag{14}$$

Analogamente applicando le relazioni per  $\hat{L}_- |\psi_{MIN}\rangle$

$$\lambda_{zMIN}^2 - \hbar \lambda_{zMIN} - \lambda_L = 0$$

Abbiamo dunque le due relazioni

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{zMAX}^2 + \hbar \lambda_{zMAX} - \lambda_L &= 0 \\ \lambda_{zMIN}^2 - \hbar \lambda_{zMIN} - \lambda_L &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{VI.6.32}$$

$$\Rightarrow \lambda_{zMAX}^2 - \lambda_{zMIN}^2 + \hbar(\lambda_{zMAX} + \lambda_{zMIN}) = 0 \Rightarrow \lambda_{zMAX} + \lambda_{zMIN} = 0 \Rightarrow$$

<sup>14</sup> Ricordare che gli operatori di shift non modificano gli autovalori di  $\hat{L}^2$

$$\lambda_{z\text{MIN}} = -\lambda_{z\text{MAX}}^{15} \quad (\text{VI.6.33})$$

D'altra parte sappiamo che la applicazione ripetuta di  $\hat{L}_+$  incrementa gli autovalori di  $\hbar$  ad ogni step e dunque:

$$\lambda_{z\text{MAX}} = \lambda_{z\text{MIN}} + n \hbar$$

Dove  $n$  è un intero calcolabile se si tiene conto della relazione precedente per la quale:

$$\lambda_{z\text{MAX}} = -\lambda_{z\text{MAX}} + n \hbar \text{ e dunque } \lambda_{z\text{MAX}} = n \frac{1}{2} \hbar$$

Consideriamo la successione  $\{l\} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$

$$\lambda_{z\text{MAX}} = l \hbar$$

D'altra parte dalla (6.32)

$$\lambda_{L_z} = \lambda_{z\text{MAX}}^2 + \hbar \lambda_{z\text{MAX}} = \lambda_{z\text{MAX}} (\lambda_{z\text{MAX}} + \hbar) = l(l+1) \hbar^2$$

In conclusione gli autovalori di  $\hat{L}^2$ , solitamente indicati attraverso la radice quadrata valgono:

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad (\text{VI.6.34})$$

E fissato il valore di  $l$  le componenti del momento angolare variano nell'intervallo  $[-l, +l] \hbar$  prendendo i valori  $-l, -l+1, \dots, 0, 1, \dots, l$  in unità  $\hbar$ .

$$L_z = \{-l, -l+1, \dots, 0, 1, \dots, l\} \hbar \quad (\text{VI.6.35})$$

<sup>15</sup> Si è trascurata la soluzione  $\lambda_{z\text{MAX}} - \lambda_{z\text{MIN}} + \hbar = 0$  impossibile perché  $\lambda_{z\text{MAX}} - \lambda_{z\text{MIN}} \geq 0$

## 6.4 Lo spin

### 6.4.1 L'ESPERIMENTO DI STERN E GERLACH

Mentre cercavo di documentarmi in maniera non generica su questo esperimento cruciale, la cui *filosofia di fondo* è diventata la madre di decine di esperimenti mentali volti ad illustrare le caratteristiche dello spin, mi sono imbattuto in un articolo dal sito dell'università di Stanford che sintetizza in maniera esemplare il senso di questo esperimento: *esperimento corretto, teoria sbagliata*.

Otto Stern, assistente di Born, era alla ricerca della dimostrazione sperimentale della quantizzazione dei momenti magnetici associati ai momenti angolari, a loro volta dovuti al movimento degli elettroni negli atomi e pensava di farlo sfruttando alcune metodiche sul movimento di fasci atomici e molecolari in cui si stava specializzando e per i quali nel 1943 ha poi ricevuto il premio Nobel.

Dal punto di vista sperimentale si trattava, per quei tempi, di esperimenti sofisticati da svolgere in tubi con vuoto molto spinto per evitare che le traiettorie degli atomi sotto osservazione fossero influenzate da urti con le molecole d'aria. Il vuoto era realizzato tramite pompe a vapori di mercurio mentre come sorgenti si usavano atomi collimati in velocità e direzione. Gli atomi provenivano da un forno in modo di garantirne una *velocità termica controllata* con grossi problemi di gradiente termico tra la zona sorgente e la zona bersaglio dove agiva la pompa).

La teoria sui momenti magnetici (angolari) era in evoluzione ed era discutibile persino se ci si dovesse riferire ad un numero quantico pari a 0 o a 1, il che avrebbe comportato la presenza di 3 momenti magnetici  $-1$ ,  $0$  e  $1$  mentre il caso  $l = 0$  avrebbe comportato assenza di momento magnetico.

Stern, con la collaborazione preziosa di Gerlach, esperto di tecniche sperimentali, mise a punto un apparato che avrebbe dovuto evidenziare tramite macchie su un rivelatore fotografico la presenza o assenza di momento magnetico quantizzato.

Atomi di un medesimo metallo venivano convogliati verso una zona in cui era presente un campo magnetico fortemente disomogeneo in modo che, se gli atomi fossero assimilabili a microscopiche barre magnetiche, a seconda del grado e del verso della quantizzazione, si sarebbero spostati lungo l'asse  $z$  (quello con presenza di un gradiente di campo).

In assenza di campo magnetico gli atomi collimati avrebbero dovuto produrre l'immagine della fenditura rettangolare omogenea, mentre in presenza di campo magnetico si sarebbero dovute produrre immagini spazialmente distinte.

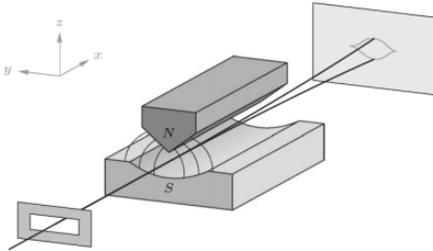
Per l'esperimento vennero utilizzati vapori di Argento che ha una struttura atomica con 47 elettroni e protoni e un numero variabile di neutroni tra 60 e 62.

La configurazione elettronica è  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 4d^{10} 5s^1$  e dunque l'atomo può essere pensato come circondato da una nube elettronica chiusa a simmetria sferica di 46 elettroni con l'unico elettrone spaiato sul quinto livello il che fa pensare che in termini di momenti magnetici ci si debba riferire solo a quello.

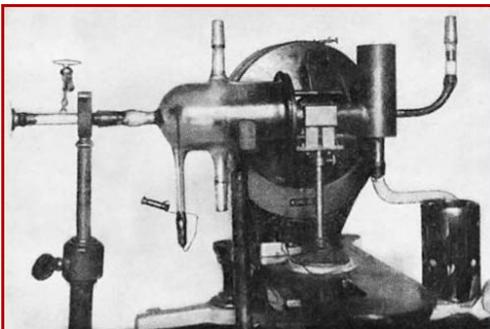
Stanford Encyclopedia of Philosophy

Supplement to Experiment in Physics

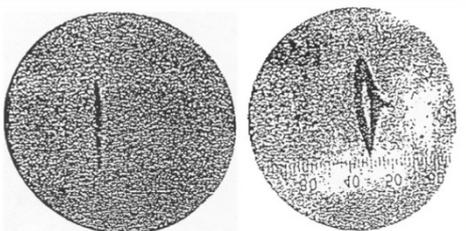
Appendix 5: Right Experiment, Wrong Theory: The Stern-Gerlach Experiment



schema dell'esperimento: la presenza di un gradiente nel campo magnetico fa sì che gli ipotetici magnetini (gli atomi) vengano respinti o risucchiati lungo l'asse  $z$  deformando l'immagine della fenditura rettangolare



l'apparato sperimentale usato da Stern & Gerlach



il risultato dell'esperimento nelle foto allegate all'articolo originale (1922)

Stern si aspettava di ottenere tre dislocazioni spaziali e invece ne ottenne solo due (oggi sappiamo che si tratta di un effetto dovuto allo spin e non ai momenti angolari orbitali).

Tutti erano convinti che si dovesse ragionare sui momenti angolari orbitali e Bohr avanzò l'ipotesi che la presenza di due momenti magnetici distinti ed opposti potesse essere dovuta a due versi di rotazione opposti da parte dell'elettrone più esterno dei diversi atomi.

La conclusione di Stern e Gerlach si limita a prendere atto del risultato: Indipendentemente da ogni teoria, come puro risultato sperimentale e per quanto l'esattezza dei nostri esperimenti ci consente di dire, si può affermare che gli atomi di argento immersi in un campo magnetico presentano solo due valori discreti di componenti di momento magnetico nella direzione del campo; entrambi presentano lo stesso valore assoluto e sono ripartiti a metà tra gli atomi coinvolti. (Stern e Gerlach 1924)



### 6.4.2 UN PO' DI STORIA TRA ESPERIMENTI E TEORIA

Le righe spettrali emesse da atomi eccitati, quando vengono sottoposte ad una indagine raffinata rivelano la presenza di sparpagliamenti detti doppietti, tripletti, ... (in sintesi *multipletti*).

Si tratta evidentemente di fenomeni dovuti a sparpagliamenti nei livelli energetici dovuti a qualche nuova proprietà a livello atomico e nel 1925 Samuel Goudsmit George Uhlenbeck, per spiegarne la esistenza, avanzarono l'ipotesi che l'elettrone fosse dotato di una proprietà di momento angolare intrinseca alla particella (come sono intrinseche, la massa e la carica).

Inizialmente, raccogliendo le ipotesi che erano state alla base dell'esperimento di Stern e Gerlach si ipotizzò che si trattasse di un fenomeno di tipo rotatorio (*spin* = trottola) ma questa ipotesi venne abbandonata, anche se il nome è rimasto. Gli effetti di tipo magnetico legati ad una carica soggetta a moto rotatorio si rivelarono in contrasto con i risultati sperimentali per un fattore 2 e dunque l'idea di un momento angolare associato ad un modello classico-intuitivo venne abbandonata.

Lo spin è dunque una nuova osservabile di cui sono dotate tutte le particelle (inclusi i fotoni) anzi l'analisi dello spin ha dato luogo ad una divisione delle particelle in due grandi gruppi con comportamenti statistici differenti: i *bosoni* sempre dotati di spin intero (in unità di  $\hbar$ ) e i *fermioni* dotati di spin semi-intero.<sup>16</sup>

Il valore dello spin (trattandosi di un momento angolare) è dato in unità di  $\hbar$  ma questa volta, nel caso dell'elettrone il modulo può assumere un solo valore

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar \quad \text{con } s = \frac{1}{2} \quad (\text{VI.6.36})$$

Pertanto:

<sup>16</sup> I bosoni seguono la statistica di Bose-Einstein, i fermioni quella di Fermi-Dirac e la differenza di spin fa sì che particelle di spin intero possano coesistere in una medesima regione cosa impossibile per i fermioni. La coesistenza per i fotoni è alla base del funzionamento dei laser mentre la non coesistenza, nel caso dei fermioni, fa sì che i livelli energetici si saturino quando due elettroni hanno i medesimi quattro numeri quantici e quindi si deve passare ad un nuovo livello (principio di esclusione di Pauli).

$$S = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{3}{2}} \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \quad 17$$

La proiezione dello spin lungo una generica direzione preassegnata ha solo due valori (su e giù) con valore  $\frac{1}{2}$  e dunque:

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2} \quad (\text{VI.6.37})$$

Il rapporto tra il momento magnetico e il momento angolare, nel caso dello spin è doppio di quello dei momenti angolari orbitali:

$$\frac{\mu_s}{L_s} = - \frac{e}{m_e c} \quad (\text{VI.6.38})$$

Il segno  $-$  indica il fatto che i due momenti hanno sempre verso opposto.

Richiamiamo brevemente il legame classico tra momento angolare e momento magnetico: una particella di carica  $q$  e massa  $m$  in moto circolare uniforme a distanza  $r$  corrisponde ad una corrente

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q}{T} = \frac{q v}{2\pi r}$$

che percorre una spira circolare di area  $A = \pi r^2$ ; a questo moto corrisponde un momento angolare  $L = m v r$  d'altra parte il momento magnetico

$$\mu = I A = \frac{q v}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{q v r}{2} = \frac{q L}{2m}$$

Solitamente in microfisica si assume come riferimento dei momenti magnetici il *magnetone di Bohr*  $\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e}$

Nel caso dell'elettrone  $q = -e$  e dunque si ottiene:

$$\mu = - \frac{e L}{2m_e} = - \frac{\mu_B L}{\hbar} \text{ o in forma vettoriale:}$$

$$\vec{\mu} = - \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \quad (\text{VI.6.39})$$

Proseguendo su questa analogia che si è rivelata corretta nel caso della *osservabile momento angolare* si scrive una relazione analoga per lo spin; la relazione risulta sperimentalmente corretta a meno di un fattore moltiplicativo  $g$  (rapporto giromagnetico)

$$\vec{\mu} = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S} \quad (\text{VI.6.40})$$

che, misurato sperimentalmente, vale

$$g = 2.00231930436118 \pm 0.00000000000026$$

Il fattore 2 (in forma esatta) viene dedotto dalla equazione di Dirac per la meccanica quantistica relativistica ed è trascorso poco più di un decennio prima che la introduzione della teoria quantistica dei campi (QED) desse una spiegazione di quelle cifre decimali (Feynmann e altri).

---

<sup>17</sup> Il momento angolare orbitale si indica con L e quello di spin con S mentre solitamente si usa la J per quello complessivo.

Nel caso del protone e del neutrone (anch'essi dotati di spin semi-intero) ci si aspetterebbe di trovare una differenza esclusivamente legata alla massa, ma non è così:

si definisce intanto un magnetone nucleare analogo al magnetone di Bohr:

$$\mu_N = \frac{e \hbar}{2 m_p}$$

$$\vec{\mu} = g \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{S} \tag{VI.6.41}$$

ma in questo caso il rapporto giromagnetico vale:

- 2.79277 ± 0.00003 per il protone
- 1.91314 ± 0.00005 per il neutrone

Doppia sorpresa legata ai valori diversi e alla presenza di cifre decimali:

non si tratta di particelle elementari ma di *aggregati di quark* dotati di una propria struttura interna; tra le altre cose questo spiega come mai anche il neutrone, che non ha carica elettrica abbia uno spin.

### 6.4.3 ESPERIMENTI IDEALI CON LO SPIN DEGLI ELETTRONI

La presenza di una proprietà quantistica, semplice da descrivere (due soli valori) e connaturata alla particella ha fatto dello spin degli elettroni lo strumento ideale per mostrare la stranezza dei comportamenti quantistici e, come vedremo, la discussione sulla *presunta inadeguatezza della teoria*, ha avuto una svolta quando si è capito che, *per tagliare la testa al toro* in termini di fisica sperimentale si doveva ragionare sullo spin.

Oggi esistono testi universitari che espongono la intera teoria quantistica partendo dallo spin e da esperimenti ideali alla Stern & Gerlach per poi introdurre gradualmente i postulati e tutto il resto.<sup>18</sup>

Presentiamo qui di seguito alcuni esperimenti ideali che consentono di ragionare sulle caratteristiche dello spin. Le immagini sono state ottenute usando la applicazione citata in nota

#### 6.4.3.1 Esperimento 1

Nel primo esperimento ideale sono presenti due analizzatori che lavorano sulla medesima direzione.

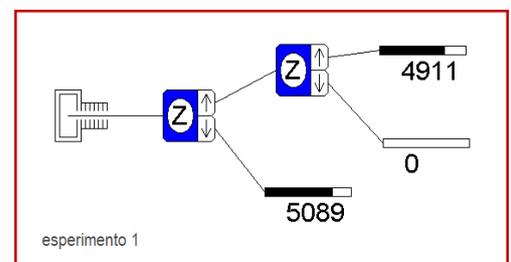
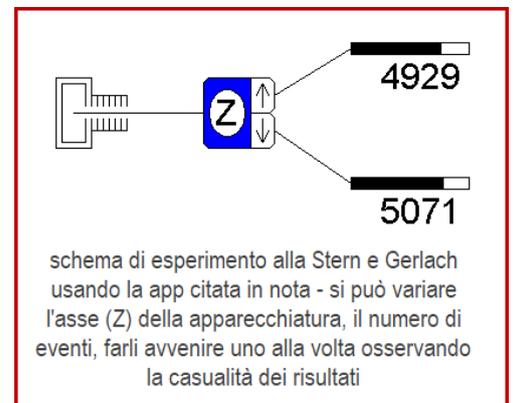
Il primo serve a preparare il sistema e da esso emergeranno, con eguale probabilità particelle con spin parallelo e antiparallelo.

Il secondo analizzatore ci mostra che, dopo la prima misura, le particelle con spin parallelo, se entrano in un secondo analizzatore che lavora nella stessa direzione, escono tutte immutate.

Fin qui nulla di strano: le particelle in ingresso al primo analizzatore generate in maniera random si trovano in una sovrapposizione di stati;

<sup>18</sup> Si veda in proposito David H. McIntyre (Oregon State University) "QUANTUM MECHANICS A Paradigms Approach" un testo di cui consiglio la lettura per un primo avvicinamento alla meccanica quantistica.

All'indirizzo [www.physics.oregonstate.edu/qmactivities](http://www.physics.oregonstate.edu/qmactivities) è possibile scaricare liberamente una applicazione scritta in Java che consente di lavorare con lo spin oltre ad apparati didattici di corredo al testo



l'analizzatore equivale ad una misura che determina la divisione in spin su e spin giù.

Ai due risultati corrispondono due autovettori  $|\uparrow\rangle_z, |\downarrow\rangle_z$  ortonormali.

Dopo il primo analizzatore le particelle con spin su  $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_z$  entrano nel secondo analizzatore ed escono immutate come dice il postulato sul collasso del pacchetto d'onda.

Ragionando in termini di probabilità abbiamo che:

$$P_2(|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_z) = |\langle\uparrow|\uparrow\rangle_z|^2 = 1$$

$$P_2(|\psi\rangle = |\downarrow\rangle_z) = |\langle\downarrow|\uparrow\rangle_z|^2 = 0$$

### 6.4.3.2 Esperimento 2

Il secondo esperimento è identico al primo ma il secondo analizzatore viene orientato secondo una direzione ortogonale alla precedente e questa volta le particelle che avevano spin su rispetto a z si dividono esattamente a metà con spin su e giù rispetto all'asse x.

Va da sé che avremmo ottenuto lo stesso risultato usando l'asse y al posto dell'asse x, così come se avessimo attaccato il secondo analizzatore all'uscita inferiore del primo. Ciò che conta è che i due analizzatori lavorino su direzioni tra loro ortogonali.

Ragionando in termini di probabilità abbiamo che:

$$P(|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_x) = |\langle\uparrow|\uparrow\rangle_z|^2 = 1/2$$

$$P(|\psi\rangle = |\downarrow\rangle_x) = |\langle\downarrow|\uparrow\rangle_z|^2 = 1/2$$

#### 6.4.3.2.1 Le relazioni tra gli autovettori al variare del riferimento

A questo punto ci possiamo porre il problema di esprimere i due autovettori  $|\uparrow\rangle_x$  e  $|\downarrow\rangle_x$  riferiti all'analizzatore orientato su x attraverso quelli riferiti all'asse z che costituiscono una base completa.<sup>19</sup>

In generale, data una base completa, lo stato si esprime attraverso la combinazione lineare

$$|\uparrow\rangle_x = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$$

$$|\downarrow\rangle_x = \gamma|\uparrow\rangle + \delta|\downarrow\rangle$$

e tenendo conto della corrispondenza tra i bra e i ket:

$$\langle\uparrow|_x = \alpha^*\langle\uparrow| + \beta^*\langle\downarrow|$$

$$\langle\downarrow|_x = \gamma^*\langle\uparrow| + \delta^*\langle\downarrow|$$

se ora teniamo conto del fatto che conosciamo le probabilità:

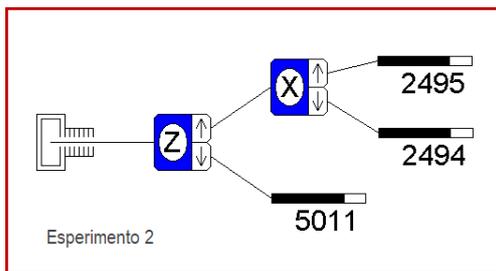
$$P(|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_x) = |\langle\uparrow|\uparrow\rangle_x|^2 = |\langle\alpha^*\langle\uparrow| + \beta^*\langle\downarrow||\uparrow\rangle|^2 =$$

$$|\langle\alpha^*\langle\uparrow| + \beta^*\langle\downarrow||\uparrow\rangle|^2 = |\alpha^|^2 + 0 = |\alpha^|^2 = 1/2$$

$$\text{da cui } |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Procedendo allo stesso modo si ottiene il medesimo risultato anche per  $\beta, \gamma$  e  $\delta$ . I 4 numeri complessi  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  avranno dunque una forma del tipo:

<sup>19</sup> Visto il ruolo speciale svolto dall'asse z, per economia di scrittura non indicheremo i pedici riferiti a z.



$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$$

ma poiché se uno stato cambia per un fattore di fase (che ha modulo unitario) le probabilità legate a modulo quadro non cambiano, ciò che conta è solo la differenza di fase tra le diverse componenti dello stato e dunque, senza perdita di generalità, potremo assumere che uno dei due coefficienti sia reale e positivo mentre il secondo conterrà un fattore di fase.

In conclusione i due vettori che fanno da base rispetto a x saranno del tipo:

$$|\uparrow\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + e^{i\theta} |\downarrow\rangle) \tag{VI.6.42}$$

$$|\downarrow\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + e^{i\omega} |\downarrow\rangle)$$

Rimane un problema di determinazione delle fasi: d'altra parte i due vettori  $|\uparrow\rangle_x$  e  $|\downarrow\rangle_x$  dovranno a loro volta essere ortonormali.

La norma è già unitaria basta dunque occuparsi della ortogonalità:

$$\begin{aligned} {}_x\langle\downarrow| |\uparrow\rangle_x &= \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle + e^{-i\omega} |\downarrow\rangle) | (|\uparrow\rangle + e^{i\theta} |\downarrow\rangle) = 20 \\ &= \frac{1}{2} [1 + e^{i(-\omega+\theta)}] = 0 \end{aligned}$$

Da cui  $e^{i(-\omega+\theta)} = -1$  e quindi  $-\omega+\theta = \pi \Rightarrow \theta = \pi + \omega$

Rimane comunque un parametro libero legato al fatto che abbiamo imposto che x fosse ortogonale a z, ma questa condizione non determina una direzione ma un intero piano.

Facciamo allora la scelta più semplice prendendo  $\theta = 0$  il che comporta  $\omega = -\pi$  e dunque  $e^{i\theta} = 1$  e  $e^{i\omega} = -1$

Dunque i due vettori che fanno da base quando si misura lungo l'asse x sono:

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \\ |\downarrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \end{aligned} \tag{VI.6.43}$$

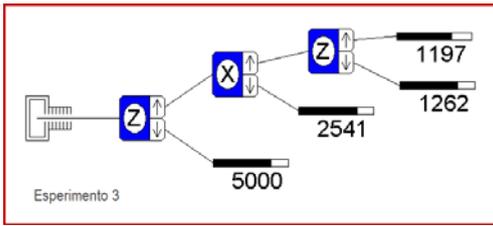
Con ragionamenti analoghi potremmo arrivare a determinare le basi lungo y ma questa volta, poiché l'asse x è stato determinato con  $\theta = 0$ , poiché y è ortogonale a x dovremo prendere come angoli  $\frac{1}{2} \pi$  e  $-\frac{1}{2} \pi$  ottenendo per i fattori di fase  $i$  e  $-i$

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \\ |\downarrow\rangle_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle) \end{aligned} \tag{VI.6.44}$$

### 6.4.3.3 Esperimento 3

Nel terzo esperimento gli analizzatori in gioco sono tre e si tratta di vedere cosa accade se il terzo presenta la stessa direzione del primo: continua a valere la regola della divisione a metà.

<sup>20</sup> Attenzione a non coniugare due volte (o si coniuga quando si passa da ket a bra o si coniuga quando si usa la anti linearità a sinistra del prodotto scalare).



Dopo il primo analizzatore sono uscite particelle nello stato  $|\uparrow\rangle_z$  il secondo analizzatore le ha separate a metà tra  $|\uparrow\rangle_x$  e  $|\downarrow\rangle_x$  e il primo gruppo ha affrontato nuovamente un analizzatore z che le ha divise esattamente a metà tra  $|\uparrow\rangle_z$  e  $|\downarrow\rangle_z$ . Ovviamente non sarebbe cambiato nulla se il III fosse stato di tipo y.

Le particelle con  $|\uparrow\rangle_x$  anche se sono state prodotte in ingresso da  $|\uparrow\rangle_z$  in qualche modo dimenticano la loro origine e infatti nel terzo analizzatore si dividono nuovamente a metà. Ragioniamo in termini di due osservabili macroscopiche come il colore di calze e scarpe. Se il primo analizzatore fa uscire scarpe nere e il secondo discrimina tra esse calze bianche e nere quando la scarpa nera, calza bianca analizza nuovamente il colore delle scarpe le divide ancora a metà per una specie di incompatibilità tra l'esperimento scarpe e l'esperimento calze.

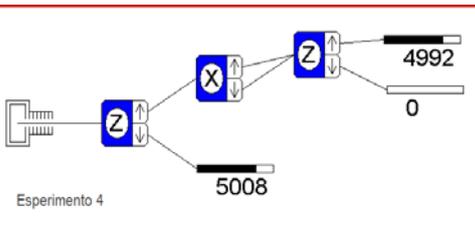
### 6.4.3.4 Esperimento 4

Con l'esperimento 4 iniziano le stranezze. Quando le due uscite dell'analizzatore x vengono entrambe inviate a z, le cose vanno come se il secondo analizzatore non fosse esistito.

In effetti all'uscita del secondo analizzatore abbiamo uno stato:

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_x + |\downarrow\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) = |\uparrow\rangle$$

E dunque tutte le particelle, sottoposte a test risultano avere spin su.



### 6.4.4 LE MATRICI DI PAULI

Oltre a quanto già evidenziato circa il rapporto tra momento angolare e momento magnetico lo spin presenta altre differenze importanti rispetto al momento angolare:

- lo spin di una particella non può essere variato in intensità ma può essere solo reso parallelo o antiparallelo rispetto ad una direzione data;
- il vettore di stato non è rappresentato da una funzione d'onda spazialmente estesa; l'autostato dello spin è una pura proprietà della particella e ci aspettiamo che possa essere rappresentato in forma matriciale.

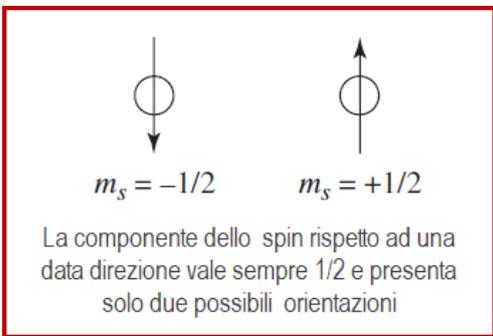
Poiché ci muoviamo in uno spazio di Hilbert a due dimensioni potremo utilizzare la notazione matriciale per esprimere gli operatori di spin.

Quella che segue è la trattazione proposta tradizionalmente dai testi di MQ ma i risultati, sono esattamente gli stessi che abbiamo trovato con gli esperimenti ideali alla Stern-Gerlach.

Chiederemo, trattandosi di un momento angolare, che valgano le relazioni già esposte per il momento angolare e cioè che:

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}^2 &= \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 \\ [\hat{S}_x, \hat{S}_y] &= i\hbar \hat{S}_z \\ [\hat{S}_y, \hat{S}_z] &= i\hbar \hat{S}_x \\ [\hat{S}_z, \hat{S}_x] &= i\hbar \hat{S}_y \end{aligned} \right\}$$

Consideriamo l'asse z potremo indicare un vettore ortonormale che punta in su con un vettore colonna di componenti 1,0 e quello in giù con 0,1.



$$\left. \begin{aligned} |\uparrow\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \hat{S}_z |\uparrow\rangle &= \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle \\ |\downarrow\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \hat{S}_z |\downarrow\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.6.45})$$

I due vettori  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  sono ortonormali e formano una base per  $\mathfrak{R}^2$

$$\langle\uparrow|\uparrow\rangle = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \langle\downarrow|\uparrow\rangle = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

e così via

Per determinare gli elementi della matrice di  $\hat{S}_z$  basta utilizzare i prodotti scalari:

$$S_{z11} = \langle\uparrow|S_z|\uparrow\rangle = \langle\uparrow|\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}$$

$$S_{z12} = \langle\uparrow|S_z|\downarrow\rangle = \langle\uparrow|-\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2} \cdot 0 = 0$$

$$S_{z21} = \langle\downarrow|S_z|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot 0 = 0$$

$$S_{z22} = \langle\downarrow|S_z|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|-\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}$$

E dunque:

$$\hat{S}_z = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6.46})$$

La determinazione delle altre due matrici richiede l'utilizzo degli operatori di scala per i quali è già stata dimostrata la proprietà (*shift*) che hanno di intervenire sugli autovalori delle componenti in incremento e decremento

$$\begin{cases} \hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y \\ \hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y \end{cases} \quad (\text{VI.6.47})$$

Gli elementi della matrice  $\hat{S}_+$  si trovano dalla capacità di incrementare di  $\hbar$  gli autovalori tenuto conto delle limitazioni sul massimo; precisamente

$$\hat{S}_+ |\uparrow\rangle = 0 \quad \hat{S}_+ |\downarrow\rangle = \hbar |\uparrow\rangle$$

Pertanto:

$$S_{+11} = \langle\uparrow|S_+|\uparrow\rangle = \langle\uparrow|0|\uparrow\rangle = 0$$

$$S_{+12} = \langle\uparrow|S_+|\downarrow\rangle = \langle\uparrow|\hbar|\uparrow\rangle = \hbar$$

$$S_{+21} = \langle\downarrow|S_+|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|0|\uparrow\rangle = 0$$

$$S_{+22} = \langle\downarrow|S_+|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\hbar|\uparrow\rangle = 0$$

Dunque

$$\hat{S}_+ = \begin{bmatrix} 0 & \hbar \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6.48})$$

Analogamente si trova:

$$\hat{S}_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hbar & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6.49})$$

Noti  $\hat{S}_+$  e  $\hat{S}_-$  si ricavano immediatamente  $\hat{S}_x$  e  $\hat{S}_y$  visto che dalle (VI.6.47) si ha:

$$\begin{cases} \hat{S}_x = 1/2(\hat{S}_+ + \hat{S}_-) \\ \hat{S}_y = \frac{1}{2i}(\hat{S}_+ - \hat{S}_-) \end{cases} \text{ da cui otteniamo il risultato cercato:}$$

$$\hat{S}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \hbar \\ 1/2 \hbar & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{S}_y = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 i \hbar \\ 1/2 i \hbar & 0 \end{bmatrix}$$

Se si mette in evidenza il fattore dimensionale  $1/2 \hbar$  le tre matrici si possono scrivere in una forma più compatta (matrici di Pauli):

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_x \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_y \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z \quad (\text{VI.6.50})$$

con

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6.51})$$

Ci restano da calcolare autovalori e autovettori in x e y

Indichiamo con  $\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$  l'autovettore corrispondente al generico autovalore  $\alpha$  e scriviamo l'equazione:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \hbar \\ 1/2 \hbar & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

La matrice caratteristica risulta:

$$\begin{bmatrix} -\alpha & 1/2 \hbar \\ 1/2 \hbar & -\alpha \end{bmatrix} \text{ e dunque dovrà essere:}$$

$$\begin{vmatrix} -\alpha & 1/2 \hbar \\ 1/2 \hbar & -\alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1/4 \hbar^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1/2 \hbar \text{ come nelle attese.}$$

Consideriamo il primo autovalore  $1/2 \hbar$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \hbar \\ 1/2 \hbar & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = 1/2 \hbar \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \text{ da cui}$$

$\begin{cases} \psi_2 = \psi_1 \\ \psi_1 = \psi_2 \end{cases}$  come previsto si hanno infinite soluzioni di uguali componenti e normalizzando si ottiene:

$$|\uparrow\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6.52})$$

Eseguendo il calcolo per l'altro autovalore si ottiene:

$$|\downarrow\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Si procede in maniera del tutto simile anche per  $\hat{S}_y$  e si ottiene (gli autovalori, ovviamente sono i soliti);

$$|\uparrow\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6.54})$$

Eseguendo il calcolo per l'altro autovalore si ottiene:

$$|\downarrow\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Naturalmente le tre coppie di autovettori costituiscono, ciascuna un sistema ortonormale completo e dunque ciascuna di esse può sempre essere scritta attraverso le altre; per esempio:

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \\ |\downarrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \\ |\uparrow\rangle_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \\ |\downarrow\rangle_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle) \end{aligned} \quad (VI.6.55)$$

Dunque lo spin definiti di una particella si può sempre scrivere come combinazione lineare di altri spin. Si tratta di una proprietà che riguarda tutte le particelle di uno spazio  $\mathfrak{H}^2$  che ritroveremo in maniera identica per la polarizzazione dei fotoni e che comporta, come vedremo tra breve qualche comportamento inatteso.<sup>21</sup>

<sup>21</sup> Alcuni testi, per economia di scrittura indicano i vettori lungo x e y cambiando i due simboli per su e giù: per x  $\rightarrow \leftarrow$  e per y  $\nearrow \nwarrow$

## 6.5 Una applicazione dello spin: la risonanza magnetica

### 6.5.1 INTRODUZIONE

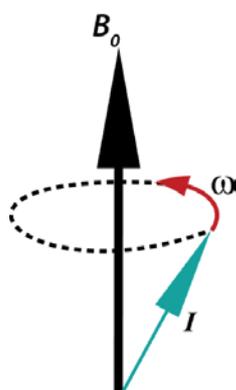
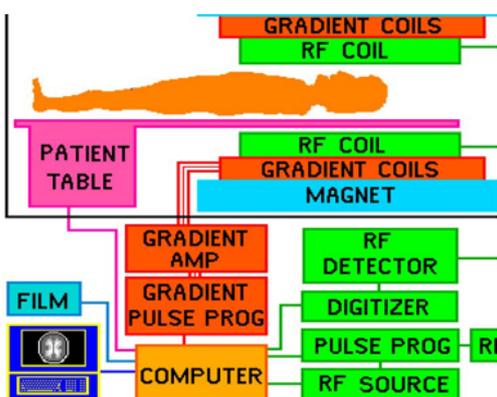
La RMI (*resonance magnetic imaging*) è una modalità di indagine su scala microscopica basata sulla capacità degli spin dei protoni immersi in un campo magnetico di:

- orientarsi,
- adottare moti di precessione (stile trottola),
- interagire con campi elettromagnetici opportuni,
- entrare in risonanza e, per effetto dell'assorbimento energetico ad essa connesso,
- modificare il proprio stato energetico,
- riassetarsi emettendo onde elettromagnetiche che, opportunamente catturate ed elaborate sono in grado di fornire immagini delle regioni spaziali in cui sono state emesse.

Il nome originario era RMN, *risonanza magnetica nucleare*, e con questo acronimo è ancora nota in Italia, ma in ossequio al *politicamente corretto* secondo cui la parola nucleare evoca il male, si è preferito sostituire la N di nucleare con la I di imaging, anche se il nucleare c'entra eccome perché il fenomeno utilizza lo spin dei nuclei atomici ed in particolare quello del nucleo più semplice, l'idrogeno, il cui nucleo è costituito da un solo protone.

Risonanza magnetica nucleare nel nome contiene gli elementi principali del processo:

- i protagonisti sono *i nuclei di idrogeno* o meglio uno dei loro costituenti intrinseci, *lo spin* che, come in tutti *fermioni* vale  $\pm \frac{1}{2} \hbar$  quando viene misurato rispetto ad una direzione qualsiasi
- la parola *risonanza* è legata al fatto che i nuclei di idrogeno, immersi in un campo magnetico statico sono soggetti ad un *moto di precessione* con una frequenza che dipende esclusivamente dal valore di B;
- se tali nuclei vengono investiti da un *campo elettromagnetico ortogonale variabile* esattamente di questa frequenza entrano in *risonanza* esattamente come accade con l'altalena quando la si spinge con la sua stessa frequenza propria. La risonanza altro non è che una condizione per cui *questi nuclei possono assorbire energia e passare ad uno stato energetico superiore* di carattere transitorio
- è il successivo riassetamento dei nuclei, con emissione di fotoni e decodifica dei medesimi che ci consente di *sapere come è fatto il mondo* da cui quei fotoni sono stati emessi



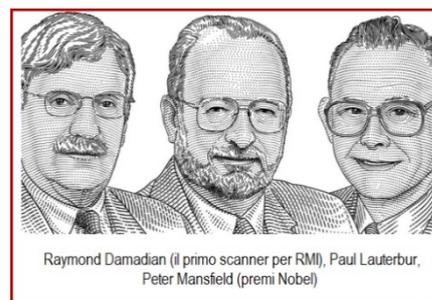
Facile a dirsi, difficile a farsi, basta pensare all'ultimo punto: il nucleo emette un fotone e da ciò costruiamo delle immagini dell'intero contesto. Non è un caso se, nonostante la risonanza magnetica nucleare fosse stata scoperta tra gli anni 30 e 40, solo alla fine degli anni 70 ne abbiamo sentito parlare sempre più frequentemente.

Nel '73, ragionando su un incidente di laboratorio che aveva alterato la uniformità del campo magnetico, Paul Lauterbur (1929-2007) e in maniera più sistematica Peter Mansfield (1933-2017), si resero conto che utilizzando gradienti di campi magnetico era possibile produrre fotoni in grado di trasformare la informazione necessaria a produrre una immagine.

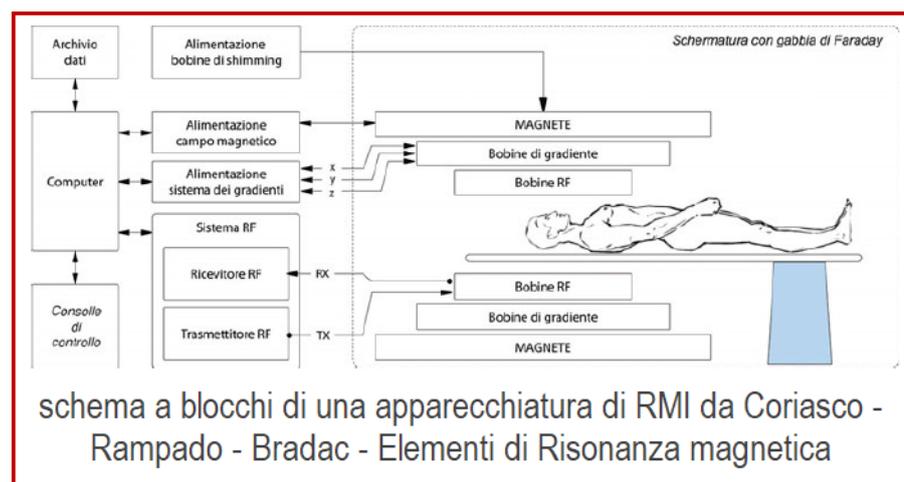
E' stato così che nel 2003 il premio Nobel per la medicina è stato assegnato a un fisico e un chimico.

Le applicazioni sono sostanzialmente due:

- in ambito radiagnostico per fornire immagini dettagliate di distretti corporei (inclusi organi interni e tessuti molli) senza utilizzare radiazioni ionizzanti come i raggi X potenzialmente in grado di indurre modifiche casuali al DNA cellulare
- in chimica organica e in biochimica per produrre immagini dirette della struttura di molecole complesse



### 6.5.2 SCHEMA A BLOCCHI E INQUADRAMENTO GENERALE



Quando si entra in un locale dove è installata una apparecchiatura di risonanza si entra in un ambiente che deve essere assolutamente protetto rispetto alla interazione bidirezionale interno esterno.

Non devono entrare segnali elettromagnetici di alcun tipo che falserebbero la lettura delle informazioni emesse dal corpo del paziente e per questa ragione il locale si trova all'interno di una gabbia di Faraday.

Qualunque oggetto di tipo ferromagnetico deve essere bandito perché la apparecchiatura funziona con un campo magnetico di tipo statico di qualche tesla (ricordo che il campo magnetico terrestre è  $0.2 \div 0.6 \times 10^{-4}$  Tesla e dunque qualunque oggetto ferromagnetico sarebbe violentemente attirato all'interno del tunne con effetti devastanti).

Questi campi magnetici superiori al tesla sono ottenuti tramite solenoidi particolari immersi in elio liquido a 4 K e percorsi da correnti elettriche intensissime in regime di superconduttività. Una volta attivato, il campo magnetico non viene mai spento e gran parte del costo della apparecchiatura è proprio dovuta all'impianto di produzione del campo magnetico principale (che va continuamente monitorato anche quando la macchina è spenta ed eventualmente rabboccato con elio liquido).

L'induzione di uno stato di eccitazione e il successivo rilascio (con generazione di onde elettromagnetiche in input e in output) avviene tramite circuiti posti all'interno della macchina (nel tunnel che circonda il paziente).

Nella macchina, oltre ai circuiti del magnete principale sono collocate altre bobine funzionali al funzionamento del sistema:

- Tre coppie di bobine che generano un gradiente del campo magnetico principale nelle tre direzioni. Questa piccola variazione di campo magnetico è quella

che consente, in sede di decodifica dei segnali di avere una informazione tridimensionale di posizione.

- Le bobine di radiofrequenza, che generano un campo magnetico in radiofrequenza ( $B_{\perp}$ ), ortogonale a  $B_0$  e dunque collocato nel piano  $xy$ . Tali bobine possono lavorare sia in trasmissione (inducendo variazioni nelle direzioni degli spin) sia in ricezione (registrando i segnali durante il riassetto degli spin). Le principali sono di tipo volumetrico e dunque si trovano all'interno del tubo, ma ne esistono anche di specializzate che vengono collocate direttamente intorno all'organo da esaminare.

I segnali avvengono secondo protocolli temporali standardizzati che consentono di trasformare le correnti indotte in immagini.

Il funzionamento della tomografia RMI si basa su proprietà deducibili in forma completa dalla MQ ma, per nostra fortuna (di divulgatori) è spesso possibile ragionare classicamente (in forma intuitiva).

### 6.5.3 IL CAMPO MAGNETICO PRINCIPALE E LA MAGNETIZZAZIONE

#### 6.5.3.1 introduzione

Nel tunnel, in cui viene inserito il paziente in posizione supina, adagiato su un lettino servo-comandato, viene prodotto un campo magnetico principale lungo l'asse  $z$ . Tale campo, come vedremo, può essere reso non esattamente uniforme e il debole gradiente che viene indotto serve per discriminare le misure lungo l'asse  $z$  (il tomografo crea immagini bidimensionali di tante fette) e la lettura tridimensionale avviene tramite sovrapposizione delle fette.

Le macchine attualmente in esercizio operano con valori di  $B$  tra 1 e 3 Tesla e la tendenza, visto che i campi magnetici statici non presentano problemi di danno biologico, è ad alzare tali valori perché, al crescere di  $B$ , aumenta il rapporto segnale/rumore e dunque, indirettamente, il potere risolutivo della apparecchiatura.

Il campo magnetico principale influenza l'orientamento degli spin dei protoni del corpo umano e si passa così da una situazione ad orientamento casuale ad una situazione in cui gli spin tendono a disporsi in maniera parallela o antiparallela al campo magnetico.

Se non esistessero i movimenti dovuti alla agitazione termica i protoni si disporrebbero secondo la posizione di energia minima (spin parallelo) ma la agitazione termica crea invece una distribuzione quasi uniforme tra le due posizioni possibili con una leggera prevalenza degli stati paralleli.

Per non appesantire la trattazione, anche se alcune delle relazioni del seguito, sono deducibili da quanto già visto, ci limitiamo a presentarle in quanto tali in modo che ci si possa concentrare sul significato più che sul processo di deduzione.

#### 6.5.3.2 L'orientamento dei dipoli magnetici nucleari

Lo spin del protone (momento angolare intrinseco), come sappiamo, è associato ad un momento magnetico di dipolo  $\vec{\mu}$  da una relazione di proporzionalità:

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{J} = g_p \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{J} \quad \text{dove } \mu_N = \frac{e \hbar}{2 m_p} \quad \text{(VI.6.56)}$$

Ne consegue che la costante  $\gamma$  vale:

$$\gamma = g_p \frac{e}{2 m_p}$$

In presenza di un campo magnetico  $B$  il dipolo magnetico (il protone) è caratterizzato da una energia potenziale:

$$U = - \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

e dunque nel caso di allineamento lungo l'asse  $z$  in presenza di un campo di intensità  $B_0$  si ha:

$$U = -\gamma \hbar B_0 m_s \quad \text{con } m_s = \pm \frac{1}{2}$$

Ipotizziamo che, in assenza di campo esterno, gli spin abbiano energia potenziale nulla.

Quando si attiva il campo si vengono a creare due livelli energetici  $\mathcal{E}_{|\uparrow\rangle}$  ed  $\mathcal{E}_{|\downarrow\rangle}$  separati da un intervallo:

$$\mathcal{E}_{|\uparrow\rangle} = -\frac{1}{2} \gamma \hbar B_0 \quad \mathcal{E}_{|\downarrow\rangle} = \frac{1}{2} \gamma \hbar B_0$$

$$\Delta \mathcal{E} = \gamma \hbar B_0 \quad \text{(VI.6.57)}$$

Teniamo presente che il gap tra i due livelli energetici è proporzionale a  $B_0$  perché, come vedremo tra breve, questo gap va ad influenzare la frequenza con cui dovremo eccitare il nostro materiale per produrre passaggi al livello energetico superiore.

### 6.5.3.3 Lo sbilanciamento tra spin su e spin giù e la magnetizzazione

Come si collocano i diversi protoni rispetto a questi livelli energetici?

Verrebbe da dire che andranno ad occupare il livello energetico inferiore (spin paralleli), ma non è così, perché bisogna tener conto della agitazione termica che porta con sé una energia media pari a  $k_B T$ .

In effetti, applicando la statistica di Boltzmann si trova che, se indichiamo con  $n_{|\uparrow\rangle}$  e  $n_{|\downarrow\rangle}$  le popolazioni sui due livelli sarà:

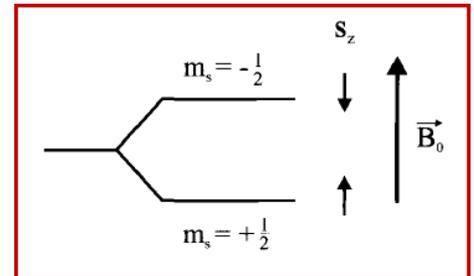
$$\frac{n_{|\uparrow\rangle}}{n_{|\downarrow\rangle}} = \exp\left(\frac{\Delta \mathcal{E}}{k_B T}\right) \quad \text{(VI.6.58)}$$

Nello specifico, assumendo la temperatura corporea di  $37^\circ = 310 \text{ K}$  che produce una energia termica di circa  $10^{-2} \text{ eV}$ , e tenuto conto che la differenza tra i livelli energetici (calcolabile con i dati forniti) è dell'ordine di  $10^{-8} \text{ eV}$  si trova che il fenomeno è molto piccolo, nell'ordine di una parte su un milione.

Se indichiamo con  $N$  la somma delle due popolazioni e teniamo conto del fatto che per  $x \ll 1$  l'esponenziale  $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ <sup>22</sup> avremo che

$$\frac{n_{|\uparrow\rangle}}{n_{|\downarrow\rangle}} \approx 1 + \left(\frac{\Delta \mathcal{E}}{k_B T}\right) \Leftrightarrow \frac{N - n_{|\downarrow\rangle}}{n_{|\downarrow\rangle}} \approx 1 + \left(\frac{\Delta \mathcal{E}}{k_B T}\right) \Leftrightarrow \frac{N}{n_{|\downarrow\rangle}} - 1 \approx 1 + \left(\frac{\Delta \mathcal{E}}{k_B T}\right)$$

<sup>22</sup> Con il simbolo di Landau  $o(x)$  si intende una quantità trascurabile rispetto a  $x$



$$N = n_{|\downarrow\rangle} (2 + x) \text{ con } x = \left( \frac{\Delta\mathcal{E}}{k_B T} \right)$$

$$\text{da cui } n_{|\downarrow\rangle} = \frac{N}{2} \frac{1}{1 + x/2} \approx \frac{N}{2} (1 - x/2)$$

$$\text{e dunque } n_{|\uparrow\rangle} = \frac{N}{2} (1 + x/2)$$

$$\Delta n \approx x N/2 = \frac{\Delta\mathcal{E}}{2k_B T} N$$

Dunque si viene a creare una magnetizzazione complessiva per unità di volume pari a:

$$\mathcal{M} = \frac{\Delta n \mu}{V} = \left( \frac{\Delta\mathcal{E}}{k_B T} \right) \frac{N}{V} \frac{\gamma \hbar}{4} = \left( \frac{\Delta\mathcal{E}}{k_B T} \right) \frac{\gamma \hbar}{4} \rho$$

$$\mathcal{M} = \left( \frac{\Delta\mathcal{E}}{k_B T} \right) \frac{\gamma \hbar}{4} \rho \tag{VI.6.59}$$

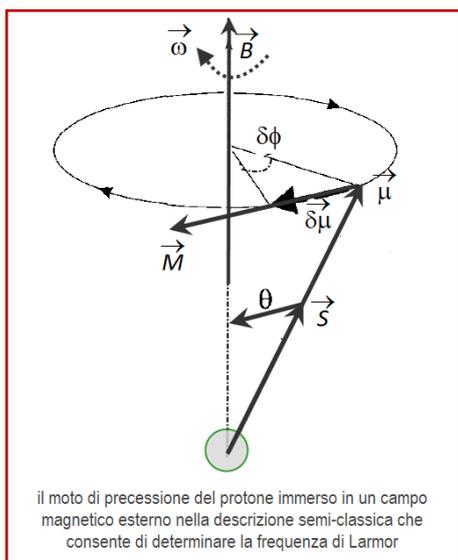
dove  $\rho$  rappresenta il numero di protoni per unità di volume. Poiché per i diversi tessuti il valore di  $\rho$  è diverso si potrebbe pensare di usare la misura locale di  $\mathcal{M}$  per raccogliere informazioni sui tessuti ma ciò in maniera diretta non è possibile a causa del suo basso valore.

Si tenga presente che se lo sbilanciamento è di una parte su un milione il numero di protoni coinvolti ha comunque l'ordine di grandezza del numero di Avogadro.

Una mole di acqua corrisponde a  $2+16 = 18$  g di acqua e in una mole ci sono  $6.02 \cdot 10^{23}$  molecole per un totale di oltre  $10^{24}$  nuclei di idrogeno.

Nelle condizioni descritte il vettore magnetizzazione è orientato come  $z$  perché nel piano  $xy$  le diverse componenti si annullano a causa del fatto che le precessioni dei diversi protoni non risultano in fase tra loro ma sono completamente disordinate.

### 6.5.4 LA PRECESSIONE E LA FREQUENZA DI LARMOR



Quando si applica un campo  $\vec{B}$  in un sistema costituito da protoni dotati di spin e disposti inizialmente su allineamenti casuali, come abbiamo già visto, avviene un processo di allineamento parallelo e antiparallelo alla direzione di  $\vec{B}$ .

Dalle equazioni dell'elettromagnetismo sappiamo che un dipolo magnetico  $\vec{\mu}$  interagisce con il campo  $\vec{B}$  attraverso la comparsa di un momento meccanico di coppia  $\vec{M}$ :<sup>23</sup>

$$\vec{M} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} \tag{VI.6.60}$$

È questo momento, a produrre il moto di precessione del tutto simile a quello di una trottola nella meccanica dei corpi rigidi. Infatti

<sup>23</sup> Non si confonda il momento meccanico  $\vec{M}$  con la magnetizzazione  $\mathcal{M}$  anche se siamo stati costretti ad utilizzare due simboli simili

l'equivalente della II legge della dinamica, applicata ai corpi rigidi, afferma che tale momento è pari alla derivata del momento angolare:

$$\vec{M} = \frac{\delta \vec{J}}{\delta t} \tag{VI.6.61}$$

Si ha dunque, ricordando che le variazioni del momento angolare e del momento magnetico sono dirette come  $\vec{M}$  e che il momento angolare di spin e il momento magnetico  $\mu$  sono proporzionali,

$$\vec{\mu} \wedge \vec{B} = \frac{\delta \vec{J}}{\delta t} = \frac{\delta \vec{\mu}}{\gamma \delta t}$$

e passando alle componenti

$$\mu B \sin \theta = \frac{\delta \mu}{\gamma \delta t} = \frac{\mu \sin \theta \delta \phi}{\gamma \delta t} = \frac{\mu \sin \theta \omega}{\gamma}$$

da cui:

$$\omega_L = \gamma B \wedge \gamma = \frac{\mu}{S_z} \tag{VI.6.62}$$

E dunque il corrispondente valore della frequenza è

$$\nu_L = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\gamma B}{2\pi} \tag{VI.6.63}$$

Dunque i protoni per effetto del riallineamento sono soggetti ad un moto di precessione (in direzione oraria nell'allineamento parallelo di minima energia) e la precessione è caratterizzata da una frequenza angolare (detta *frequenza di Larmor*) proporzionale al valore di B. La costante di proporzionalità è tipica della particella considerata.

A questo moto di precessione è associata una energia:

$$\mathcal{E} = \mu_p B \cos \theta \tag{VI.6.64}$$

In acqua il valore di  $\gamma \approx 2.68 \cdot 10^8$  rad/s/Tesla e dunque dividendo per  $2\pi$  si ha una corrispondente frequenza di 42.6 Mhz/Tesla che corrisponde ad onde elettromagnetiche nella fascia delle radiofrequenze. Si ricordi che le trasmissioni radio in modulazione di frequenza hanno frequenze tra i 30 e i 110 Mhz.

Nel calcolo della frequenza di Larmor abbiamo utilizzato la equazione:

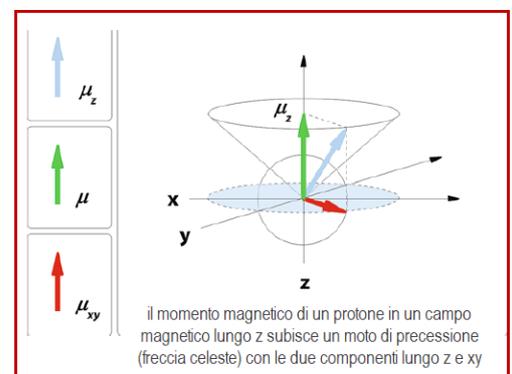
$$\vec{\mu} \wedge \vec{B} = \frac{\delta \vec{J}}{\delta t} = \frac{\delta \vec{\mu}}{\gamma \delta t}$$

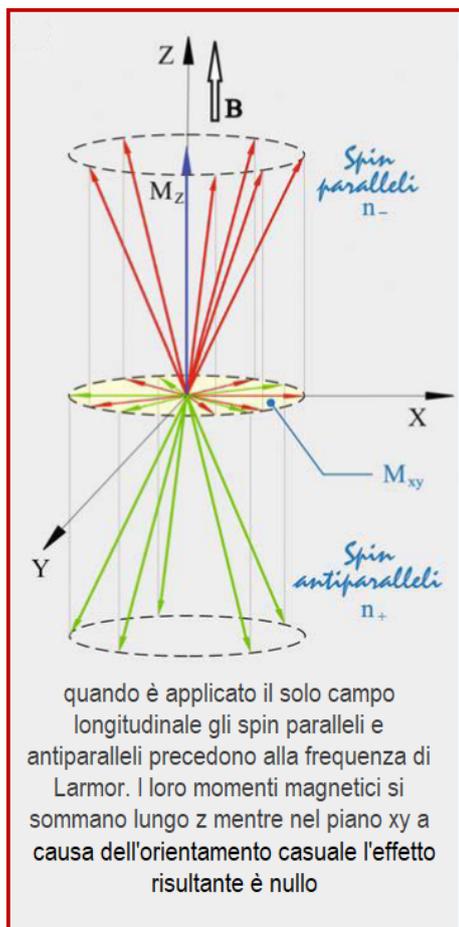
E se invece di riferirla al singolo momento magnetico la riferiamo al vettore magnetizzazione avremo:

$$\frac{d \vec{\mathcal{M}}}{dt} = \gamma \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \tag{VI.6.65}$$

### 6.5.5 LA RISONANZA

La risonanza è un fenomeno molto diffuso in natura in fenomeni oscillatori che avvengano in presenza di un fenomeno dissipativo o comun-





que di perdita energetica che, da solo, porterebbe all'annullamento delle oscillazioni.

Il sistema è in grado di oscillare con una frequenza propria e capace di ricevere energia in grado di esaltare il fenomeno oscillatorio stesso opponendosi al fenomeno dissipativo.

L'esempio più noto di risonanza è quello delle casse armoniche degli strumenti musicali a corda. La cassa ha una sua frequenza tipica di oscillazione  $\nu$  e, visto che trasmette onde sonore all'ambiente, ha la necessità di essere alimentata. Se riceve dalla corda vibrante dello strumento delle oscillazioni di frequenza pari a  $\nu$  o a dei suoi sottomultipli, è in grado di immagazzinare l'energia ricevuta amplificando le sue oscillazioni proprie.

Solitamente, per illustrare la risonanza, ci si limita a presentare l'apologo della altalena. L'altalena oscilla con una frequenza propria data dalle sue caratteristiche meccaniche (in particolare la lunghezza) e per aumentarne la ampiezza di oscillazione bisogna spingerla con una frequenza uguale o leggermente inferiore alla sua frequenza propria in modo che riceva una spinta quando si trova all'estremo superiore di oscillazione.

La risonanza è il fenomeno su cui si basa la RMI. All'interno del tubo in cui è collocato il magnete sono poste delle bobine in grado di fare da trasmettitore e ricevitore di onde elettromagnetiche.<sup>24</sup>

A livello di momenti magnetici nucleari, il sistema presenta una sua frequenza propria di oscillazione e se noi gli forniamo energia con un ritmo pari alla frequenza propria tale energia viene progressivamente immagazzinata per poi essere rilasciata quando si interrompe di fornitura della energia.

Nel testo citato in nota viene eseguito il calcolo esplicito e si trova la condizione di risonanza applicando la M.Q. Se si applica lungo l'asse x un campo magnetico oscillante:

$$\vec{B}_1 = B_1 \cos(\omega t) \vec{i}$$

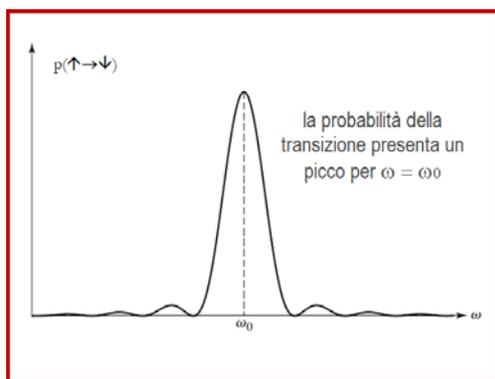
e si considera la frequenza di Larmor nella sua espressione estesa contenente il magnetone di Bohr:

$$\omega_0 = 2\mu_p / \hbar B_0$$

si dimostra che la probabilità di transizione di un protone da spin su a spin giù vale:

$$P(\uparrow \rightarrow \downarrow) = \frac{B_1^2 \mu_p^2}{4 \hbar^2} \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)t/2]}{[(\omega - \omega_0)/2]^2} = \frac{B_1^2 \mu_p^2}{4 \hbar^2} t^2 \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)t/2]}{[(\omega - \omega_0)t/2]^2}$$

e, come si vede dallo studio di funzione in figura, tale probabilità presenta un massimo netto (risonanza) per  $\omega = \omega_0$ ; inoltre tale probabilità cresce al trascorrere del tempo il che consente di pilotare il processo (è proprio quello che si fa nel corso degli esami utilizzando varie tipologie di segnale che differiscono nella loro durata).



<sup>24</sup> L'idea di descrivere il funzionamento della RMI mi è venuta dalla lettura di uno dei testi che avevo selezionato per affrontare la MQ. Si tratta di Robert Scherrer - *Quantum Mechanics (an accessible introduction)* un testo che ha il pregio di non pretendere la conoscenza di nulla che non sia noto ad uno studente di scuola superiore ed introduce gli strumenti matematici necessari, man mano che servono. E' inoltre attento alle necessità della modernità e, per esempio, descrive nei minimi dettagli i processi fisici alla base del RMI

In condizioni ordinarie si ha una situazione come quella in figura <sup>25</sup>. In ogni regione di spazio si ha la presenza di nuclei con orientamento parallelo e antiparallelo che precedono alla frequenza di Larmor.

Il risultato complessivo è una magnetizzazione lungo z frutto della somma algebrica delle componenti (ricordare che  $n_{|\uparrow\rangle} > n_{|\downarrow\rangle}$ ).

Nel piano xy la magnetizzazione è nulla perché le precessioni dei diversi nuclei avvengono senza un ordine di fase e dunque le diverse componenti si annullano reciprocamente.

Applicando un segnale in radiofrequenza di durata opportuna esiste la possibilità di indurre modifiche significative nel vettore magnetizzazione.

I diversi nuclei che assorbono energia subiscono due fenomeni:

- vengono progressivamente messi in fase, il che fa aumentare  $\mathcal{M}_{xy}$
- contemporaneamente, man mano che singoli nuclei assorbono energia aumenta l'angolo formato tra l'asse z e la direzione del momento magnetico che precede (come da relazione 6.47). L'assorbimento di energia da parte degli spin va a modificare gli angoli di precessione e arriva, per durate opportune, sino a determinare il ribaltamento completo del vettore magnetizzazione (gli spin risultano orientati in modalità antiparallela).

Nelle moderne apparecchiature la applicazione della radiofrequenza è di tipo pulsato e le durate variano da 10  $\mu$ s a qualche ms.

Le equazioni di riferimento in tutti i testi sono le equazioni di Bloch introdotte alla fine degli anni 40 su base puramente fenomenologica e che corrispondono all'uso di modelli semiclassici.

In queste equazioni sono presenti sia le componenti di aumento di magnetizzazione dovute alla applicazione del campo pulsato sia i decrementi dovuti ai riaggiustamenti (cessione di energia al reticolo, ritorno alla condizione di minima energia) che vengono utilizzati per registrare il fenomeno e produrre le immagini (detta *fase di rilassamento*).

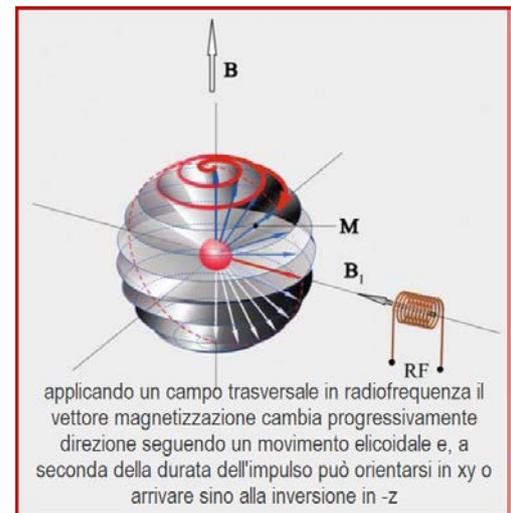
$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B} - \frac{M_x \vec{i} + M_y \vec{j}}{T_2} - \frac{(M_z - M_z^0) \vec{k}}{T_1}$$

Poiché i tempi di applicazione del campo pulsato sono molto minori delle costanti di tempo che agiscono durante il riassetamento solitamente il tutto viene descritto attraverso due fasi distinte (ignorando il fatto che anche durante la fase di risonanza si hanno anche i fenomeni di riassetamento):

- fase 1 in cui si hanno la comparsa della magnetizzazione in xy e la diminuzione di  $\mathcal{M}_z$  sino al suo ribaltamento
- fase 2 in cui non c'è segnale in radiofrequenza e avvengono i riaggiustamenti

I due campi  $B_0$  e  $B_1$  che agiscono durante la fase di risonanza hanno valori molto diversi:  $B_0$  è dell'ordine del Tesla mentre  $B_1$  è dell'ordine di  $10^{-5}$  T.

La applicazione del campo in radiofrequenza fa sì che si vengano a generare due tipi di precessione una lungo z con frequenza di Larmor e l'altra lungo l'asse x con una frequenza:



<sup>25</sup> Le immagini di questo paragrafo sono riprese dalla tesi di dottorato di Giulia Lupi presso l'università degli studi Roma 3

$$\nu_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\gamma B_1}{2\pi} \tag{VI.6.66}$$

e poiché  $B_1$  è dell'ordine di  $10^{-5} B_0$  nella ipotesi che sia  $\nu_L = 852$  MHz (valore corrispondente a 2 T) per  $B_1 = 10^{-5}$  T si avrà  $\omega = 425$  Hz.

Man mano che il campo in radiofrequenza opera il vettore magnetizzazione aumenta il suo angolo rispetto all'asse z e poiché:

$$\omega_1 = \gamma B_1 \text{ e } \Delta\alpha = \gamma B_1 \Delta t$$

basta far agire il campo in radiofrequenza per un tempo opportuno per ottenere il completo ribaltamento del vettore magnetizzazione come si vede nella figura qui a fianco.

L'angolo  $\Delta\alpha$  prende il nome di *flip angle* ed esistono due protocolli di utilizzo principali quello a  $90^\circ$  e quello a  $180^\circ$  (vettore rosso e vettore bianco).

La sovrapposizione delle due precessioni produce un movimento di tipo elicoidale del vettore  $\vec{\mathcal{M}}$  visibile nella immagine.

### 6.5.6 IL PROCESSO DI RILASSAMENTO

Quando si interrompe la somministrazione della radiofrequenza avvengono due processi combinati che presentano però durate tipiche differenti.

Per comodità esplicativa ci riferiamo al caso in cui il segnale di eccitazione sia stato del tipo a  $90^\circ$ .

Al tempo 0 abbiamo una situazione in cui  $\mathcal{M}_z = 0$  mentre  $\mathcal{M}_{xy}$  è massima e a questo punto si innestano due fenomeni di rilassamento.

In entrambi i casi la legge differenziale è di tipo probabilistico:

$$\delta\mathcal{M} = \pm k \mathcal{M} \delta t \tag{VI.6.67}$$

Dove il  $\pm$  riguarda con + il caso di aumento della magnetizzazione e con - il caso di diminuzione.

Si tratta di una equazione differenziale in cui la costante di proporzionalità  $k$  ha le dimensioni dell'inverso di un tempo e dunque si indica spesso con  $1/T$ .

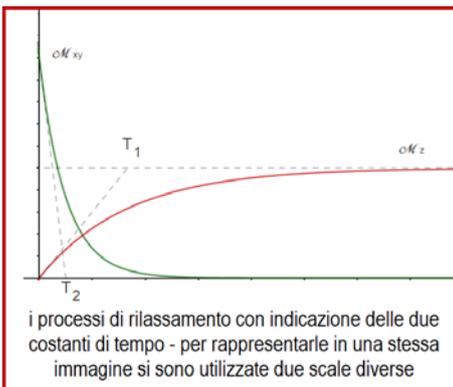
Le equazioni differenziali di questo tipo hanno sempre una soluzione di tipo esponenziale (si veda il capitolo 00) in cui il valore di  $T$  solitamente chiamato *vita media* o *tempo di rilassamento* è visibile graficamente come intercetta della retta tangente tracciata per  $t = 0$  con la retta d'asintoto orizzontale. Il valore di  $T$  ci dà una immagine diretta della rapidità del fenomeno (sia che si crescente sia che si decrescente).

Il caso crescente è solitamente (in fisica medica) indicato con  $T_1$  e il decrescente con  $T_2$ .

Il processo di rilassamento è caratterizzato da fenomeni fisici diversi e li esamineremo separatamente.

#### 6.5.6.1 La interazione spin spin

Si tratta del fenomeno al termine del quale  $\mathcal{M}_{xy} = 0$  e dal punto di vista fisico corrisponde alla perdita di concordanza di fase (sincronia) dei moti di precessione degli spin nucleari.



Come abbiamo visto la magnetizzazione trasversale era dovuta alla azione di messa in fase da parte del campo in radiofrequenza. Quando la sua azione cessa i protoni adiacenti incominciano a disturbarsi reciprocamente e ciò insieme alla presenza di disuniformità locali del campo esterno produce il la comparsa di una progressiva decoerenza.

### 6.5.6.2 La interazione spin reticolo

I protoni sono all'interno di strutture molecolari e attraverso i processi di riassetamento termico quelli in condizione di allineamento antiparallelo ripassano progressivamente alla condizione di minima energia con conseguente progressivo incremento del valore di  $\mathcal{M}_z$ .

### 6.5.7 CONSIDERAZIONI DI NATURA QUANTITATIVA

Non si scende ulteriormente in elementi di dettaglio ma ci si limita a qualche considerazione di sintesi:

- i diversi tessuti biologici presentano valori diversi per i due tempi di rilassamento e per la densità protonica (vedi tabella sottostante in cui i tempi sono espressi in ms) e ciò permette, lavorando su tre parametri di discriminarli (tecnicamente si parla di contrasto)
- agendo sulle caratteristiche dei segnali di eccitazione si riescono a misurare grazie alle correnti che si inducono durante i processi di rilassamento i valori di  $T_1$ ,  $T_2$ , e  $\rho$
- a differenza della diagnostica basata sull'assorbimento di radiazione che per sua natura non è selettiva (tessuti diversi possono presentare uguale radio-opacità e dunque forniscono immagini identiche) la RMI ha il vantaggio di essere multi parametrica perché tessuti diversi possono essere discriminati grazie al fatto che hanno comportamenti diversi sui tre parametri esaminati
- quando si esegue l'esame su una regione ampia essa viene separata in volumetti sottili lungo z e su regioni elementari in xy in modo di produrre immagini su una intera fetta xy di spessore  $\delta z$  prefissato. Ciò si ottiene grazie ai gradienti del campo principale lungo le tre direzioni

<b>Tipo di tessuto biologico</b>	<b>T2</b>	<b>T1 (1,5 T)</b>	<b>DP(%)</b>
Sostanza grigia	101	920	84
Sostanza bianca	76	780	71
Liquido cerebrospinale	1660	3270	97
Muscoli scheletrici	47	860	79
Cuore	57	860	80
Fegato	43	620	71
Reni	58	1220	81
Milza	62	1070	79
Grasso sottocutaneo	85	230	---

valori tipici al variare del tipo di materiale biologico dei tre parametri ( $T_1$ ,  $T_2$  e densità protonica) che consentono, misurandoli localmente, di ricostruire livelli di contrasto diversi nella costruzione delle immagini (fonte Coriasco-Rampado-Bradac -Elementi Di

## 6.6 L'argomento EPR, l'entanglement e la polarizzazione dei fotoni

### 6.6.1 INTRODUZIONE STORICA

Come si è osservato all'inizio del capitolo la costruzione della M.Q. è avvenuta attraverso un processo contorto, fatto di aggiustamenti e tentativi di conciliazione con la teoria classica sino alla presa d'atto che occorresse una svolta drastica comprensiva della scelta di rinunciare ad alcuni capisaldi della teoria fisica della conoscenza.

Non è un caso che due dei protagonisti,

- Einstein padre della teoria dei fotoni con cui si stabiliva il carattere ondulatorio-corporeo della radiazione elettromagnetica,
- Schrödinger, l'inventore della equazione che governa l'intero edificio della MQ, e che prevede per descrivere la dinamica delle particelle una funzione d'onda nel campo complesso,

fino alla fine espressero il loro disagio sperando in un completamento della teoria.

Il frontespizio dell'articolo di Einstein Podolsky e Rosen dedicata alla non completezza della MQ e ad un esperimento mentale sul tema della località che aprì la strada alle teorie sulle variabili nascoste

MAY 15, 1935

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 47

#### Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*  
(Received March 25, 1935)

Le obiezioni di Einstein vertevano essenzialmente su un punto: se una grandezza è misurabile allora esprime un elemento di realtà e dunque se la teoria quantistica sostiene che tale grandezza è conoscibile solo in maniera probabilistica c'è qualche cosa che non va e la teoria è incompleta. Il sommario dell'articolo recita:



In una teoria completa c'è sempre un elemento corrispondente a ogni elemento di realtà. Una condizione sufficiente per la realtà di una grandezza fisica è la possibilità di prevederla con certezza il valore senza disturbare il sistema.

In meccanica quantistica, nel caso di due grandezze fisiche descritte da operatori non commutativi la conoscenza dell'una preclude la conoscenza dell'altra.

Quindi delle due l'una ① o la descrizione della realtà attraverso la funzione d'onda non è completa oppure ② queste due grandezze non possono essere simultaneamente reali.

Prendendo in considerazione la possibilità di fare previsioni su un sistema sulla base di misure fatte su un altro sistema che abbia precedentemente interagito con esso si arriva al risultato che se ① è falsa anche ② è falsa. Si è dunque portati a concludere che la descrizione della realtà data dalla funzione d'onda non sia completa.<sup>26</sup>

Einstein non ha mai sposato sino in fondo la teoria delle *variabili nascoste* sostenuta nel secondo dopoguerra da David Bohm che riuscì a costruire una *teoria completa* basata sulla idea che quando un sistema fisico dava luogo a previsioni di tipo probabilistico c'era un insieme di variabili non osservabili che trasportavano la informazione mancante rendendo la

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 85, NUMBER 2

JANUARY 15, 1952

#### A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I

DAVID BOHM\*  
*Palmer Physical Laboratory, Princeton University, Princeton, New Jersey*  
(Received July 5, 1951)

Il frontespizio dell'articolo di David Bohm in cui si costruisce una nuova meccanica quantistica deterministica basata sulla teoria delle variabili nascoste

<sup>26</sup> Sommario dell'articolo di EPR (traduzione di C.C.)

teoria *completamente deterministica*.

La seconda obiezione avanzata da Einstein in un famoso articolo del 1935 (argomento EPR acronimo dei tre firmatari dell'articolo Einstein, Podolsky e Rosen) riguardava un particolare stato dei sistemi quantistici definito come *entanglement* in cui si verificava una violazione del principio di *località*, il principio che sta alla base della teoria della relatività ristretta, secondo cui la velocità della luce nel vuoto è una velocità limite insuperabile e *ciò che accade qui ed ora* non può influenzare simultaneamente *ciò che accade là ed ora*. Secondo Einstein si trattava della prova della insufficienza della teoria quantistica.

**ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX\***

J. S. BELL†

Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin

(Received 4 November 1964)

L'articolo di John Bell del 1964 in cui viene formulata la disuguaglianza che consente di sottoporre a verifica sperimentale la teoria delle variabili nascoste

La discussione su questi temi si è conclusa attraverso due contributi: il primo è di John Bell un fisico del CERN che aveva la passione epistemologica di lavorare sui fondamenti della Meccanica Quantistica.

Bell, ragionando sulle teorie a variabili nascoste, propose una disuguaglianza verificabile sperimentalmente che consentiva di discriminare tra le *teorie alla Einstein* (incluse tutte le teorie a variabili nascoste) e la MQ con tutti i suoi aspetti paradossali.

Tale disuguaglianza venne poi estesa a contesti sperimentali più raffinati e discriminanti da Clauser-Horne-Shimony-Holt che proposero una disuguaglianza nota dalle loro iniziali come CHSH e che è stata poi concretamente utilizzata per gli esperimenti (nel testo faremo riferimento ad essa).

**PROPOSED EXPERIMENT TO TEST LOCAL HIDDEN-VARIABLE THEORIES\***

John F. Clauser†

Department of Physics, Columbia University, New York, New York 10027

and

Michael A. Horne

Department of Physics, Boston University, Boston, Massachusetts 02215

and

Abner Shimony

Departments of Philosophy and Physics, Boston University, Boston, Massachusetts 02215

and

Richard A. Holt

Department of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138

(Received 4 August 1969)

L'articolo del 1969 in cui viene data una formulazione estesa della disuguaglianza di Bell, detta CHSH dalle iniziali degli autori, CHSH sarà sottoposta a verifiche sperimentali stringenti John Bell del 1964 in cui viene formulata la disuguaglianza che consente di sottoporre a verifica sperimentale la teoria delle variabili nascoste

Il primo esperimento considerato conclusivo, condotto da Aspect e altri è del 1981.

Nel 2022 il premio Nobel per la fisica è stato assegnato a John Clauser (autore dei primi esperimenti pionieristici negli anni 70), ad Alain Aspect per suo esperimento conclusivo e ad Anton Zeilinger per gli studi sull'entanglement legati al teletrasporto quantistico di informazione.

L'articolo del 1981 firmato dal gruppo di ricerca di Alain Aspect in cui utilizzando la polarizzazione di fotoni entangled viene stabilita la validità della MQ e contestualmente il suo carattere non locale. Gli esperimenti affermano che qualunque teoria a variabili nascoste deve comunque prevedere la non località quando si effettua una misura

PHYSICAL REVIEW LETTERS

**Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem**

Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger  
*Institut d'Optique Théorique et Appliquée, Université Paris-Sud, F-91406 Orsay, France*  
 (Received 30 March 1981)

### 6.6.2 UNA DIGRESSIONE SULLA POLARIZZAZIONE DELLA RADIAZIONE LUMINOSA E DEI SINGOLI FOTONI

#### 6.6.2.1 I filtri polaroid e la legge di Malus

Gli esperimenti sull'entanglement quantistico sono stati compiuti utilizzando i fotoni e una proprietà (la polarizzazione) che risulta più semplice da maneggiare rispetto ai rivelatori di spin basati sui magneti alla Stern e Gerlach.

In entrambi i casi si opera in uno spazio di Hilbert a due dimensioni ma i polarizzatori sono economici e facili da maneggiare e la rivelazione dell'arrivo di singoli fotoni lo è altrettanto.

La polarizzazione è una proprietà dei fasci luminosi che corrisponde al fatto che il campo elettrico e quello magnetico, ortogonale al primo che compongono l'onda elettromagnetica, oscillano in un piano perpendicolare alla direzione di trasmissione. Quando la direzione di oscillazione è sempre la stessa si può definire un piano di polarizzazione formato da una delle due direzioni di oscillazione e quella di propagazione e si parla di onda trasversale polarizzata linearmente.

In generale un raggio di luce non è polarizzato perché i diversi fotoni che lo compongono, emessi in maniera random su scala atomica o molecolare, presentano fasi e direzioni di oscillazione *random*; ma esistono modi molto semplici per produrre fasci polarizzati. I due più semplici sono i filtri polaroid e i cristalli birifrangenti.

Nel primo caso il filtro si comporta come una fenditura e lascia passare solo le componenti di campo elettrico in quella direzione.

Nel secondo caso il cristallo divide il fascio incidente in due raggi che presentano piani di polarizzazione diversi.

Nel caso dei filtri polaroid il raggio luminoso dopo il filtro risulta polarizzato nella direzione del filtro e in qualsiasi apparato sperimentale utilizzato c'è un primo filtro che serve a preparare il fascio polarizzato.

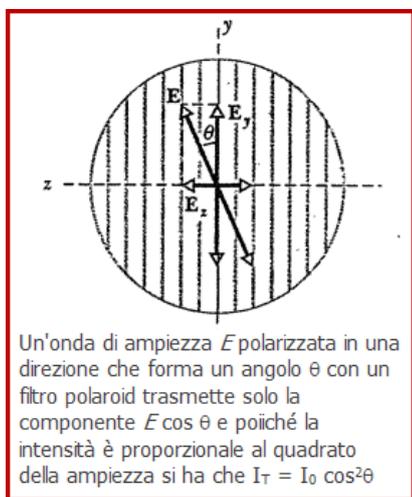
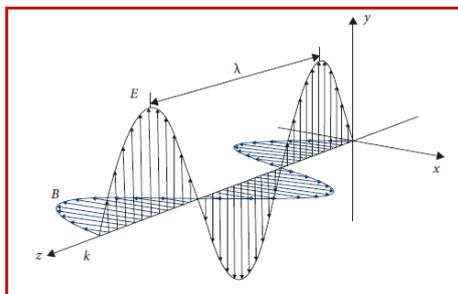
Consideriamo ora un fascio di luce polarizzata linearmente e supponiamo di inviarla ad un secondo filtro il cui asse formi un angolo  $\theta$  con la direzione di polarizzazione. Poiché le grandezze oscillanti possono essere rappresentate come vettori rotanti potremo utilizzare le leggi del calcolo vettoriale per determinare la componente di campo elettrico trasmessa.

E poiché la intensità è proporzionale al quadrato della ampiezza avremo che (legge di Malus):

$$I_T = I_0 \cos^2\theta \tag{VI.6.68}$$

Cosa avviene in termini di intensità luminosa quando partendo da un fascio non polarizzato lo si manda attraverso un polaroid?

La risposta è che passa la metà della intensità luminosa. Come mai?



Osserviamo in primo luogo che dal punto di vista angolare bisogna prendere in esame le direzioni tra 0 e  $\pi$ .

Dividiamo tale intervallo in due metà e osserviamo che per  $\theta \in [0, \frac{1}{2}\pi]$  fissato  $\delta\theta$  che invia una certa intensità luminosa  $\delta I$  esiste un angolo  $\theta + \pi/2$  che invia  $\delta I$  e la somma dei due contributi trasmette:

$$[\cos^2\theta + \cos^2(\theta + \pi/2)]\delta I = [\cos^2\theta + \sin^2\theta]\delta I = \delta I$$

Dobbiamo sommare tutti i contributi di cui sopra per  $\theta \in [0, \frac{1}{2}\pi]$  e dunque:

$$I_t = \sum_{\theta=0}^{\pi/2} \delta I = \frac{I_0}{2} \tag{VI.6.69}$$

### 6.6.2.2 Un paradosso

Consideriamo un primo aspetto paradossale che riguarda il fenomeno della polarizzazione e che ci mostra come l'effetto dei filtri non abbia un carattere puramente passivo ma cambi le caratteristiche dell'onda.

Supponiamo di avere un raggio luminoso qualsiasi che attraversa in successione un polaroid:

- ad asse verticale: avremo che  $I_T = \frac{1}{2} I_0$
- ad asse orizzontale: avremo che  $I_T = 0$

Cosa accade se inseriamo tra il primo e il secondo polaroid un terzo polaroid inclinato di  $45^\circ$ ?

Verrebbe spontaneo di dire che l'inserimento di un ulteriore filtro tra i due non dovrebbe cambiare la situazione, invece la luminosità all'uscita aumenta e la spiegazione ci viene dalla legge di Malus:

- dopo il primo filtro abbiamo  $I_1 = \frac{1}{2} I_0$  e il fascio è ora polarizzato verticalmente
- il fascio  $I_1$  incontra un filtro inclinato di  $45^\circ$ , viene polarizzato a  $45^\circ$ , e dunque (visto che  $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ )  $I_2 = \frac{1}{2} I_1$
- il fascio  $I_2$  incontra un filtro orizzontale (di nuovo a  $45^\circ$  rispetto alla direzione di polarizzazione) e dunque  $I_3 = \frac{1}{2} I_2$

possiamo concludere che  $I_3 = \frac{1}{8} I_0$

Cosa accade se dato un fascio polarizzato verticalmente si dispongono uno dietro l'altro due filtri con orientazioni  $\alpha$  e  $\beta$  rispetto alla verticale?

$$I_{T1} = I_0 \cos^2\alpha$$

e questa parte del fascio è polarizzata lungo la direzione  $\alpha$  mentre  $I_{T2}$  poiché l'angolo tra i due filtri è  $\beta - \alpha$  sarà polarizzato nella direzione  $\beta$  con intensità pari a:

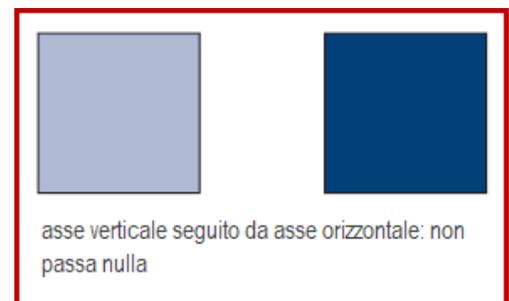
$$I_{T2} = I_0 \cos^2\alpha \cos^2(\beta - \alpha) \tag{VI.6.70}$$

#### 6.6.2.2.1 una successione di polarizzatori

Un fascio di radiazione polarizzata orizzontalmente entra in una successione

di N polarizzatori disposti l'uno rispetto al successivo con un angolo  $\varepsilon = \frac{\pi}{2N}$

in modo che l'ultimo risulta disposto perpendicolarmente. Sapendo che  $N \gg 1$  quanto vale la intensità  $I_T$  all'uscita dell'ultimo e qual è la sua polarizzazione.



Si trascurino le riflessioni tra i filtri supponendo che la parte che non viene trasmessa venga assorbita.

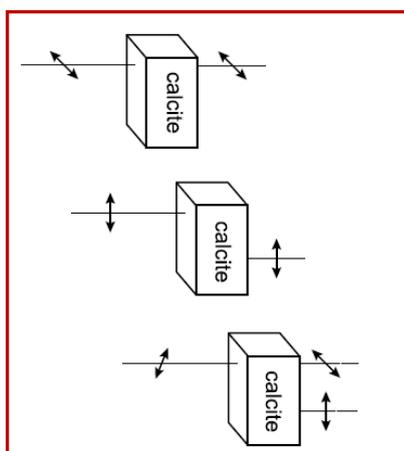
$$I_T = I_0 \cos^2 \varepsilon \cdot \cos^2 \varepsilon \cdot \dots \cos^2 \varepsilon = I_0 (\cos^2 \varepsilon)^N$$

Ma  $N = \frac{\pi}{2\varepsilon}$  e quando  $N \rightarrow \infty$  si ha  $\varepsilon \rightarrow 0$  e dunque  $\cos^2 \varepsilon \rightarrow 1$  e  $I_T \rightarrow (1)^\infty = 1$

Dunque  $I_T = I_0$  mentre la polarizzazione da orizzontale è diventata verticale.

L'aspetto paradossale del risultato ha fatto sì che questo fenomeno sia stato chiamato effetto Zenone.

### 6.6.2.3 I cristalli birifrangenti

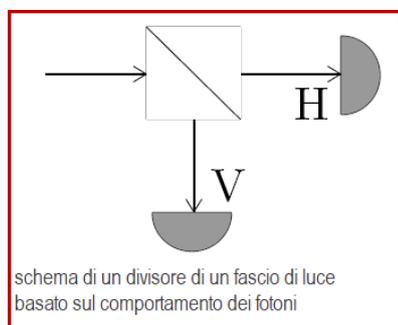


La anisotropia a livelli microscopico (con indice di rifrazione significativamente diverso) ci ha reso disponibili oltre ai filtri polaroid un altro strumento di indagine facile da usare: si tratta dei cristalli di calcite (una forma cristallina del carbonato di calcio) che possiedono la proprietà di dividere un fascio luminoso, senza assorbimento significativo, in due fasci (raggio ordinario e raggio straordinario) spostati tra loro in base allo spessore del cristallo e polarizzati secondo due direzioni tra loro ortogonali.

Nel caso in cui il raggio incidente presenti una polarizzazione  $\theta$  rispetto all'asse ottico del cristalli i due raggi ordinario e straordinario hanno intensità:

$$I_O = I_0 \cos^2 \theta \quad I_S = I_0 \sin^2 \theta \tag{VI.6.71}$$

E' del tutto evidente la analogia tra i cristalli birifrangenti e le apparecchiature alla Stern-Gerlach per separare gli spin in paralleli ed antiparalleli.



Naturalmente accoppiando in maniera opportuna cristalli di calcite è possibile anche fare in modo che i due raggi, ordinario e straordinario, seguano, in uscita traiettorie diverse; è quanto si fa nei cosiddetti *beam splitter* in cui un fascio inviato lungo la orizzontale viene separato in due fasci con direzioni ortogonali e con polarizzazione orizzontale e verticale.

### 6.6.2.4 I fotoni e la polarizzazione

Come sappiamo la radiazione elettromagnetica è un insieme molto numeroso di particelle di luce (i fotoni) ciascuno caratterizzato da una frequenza (energia) una quantità di moto ed evidentemente, da uno stato di polarizzazione.

Il fenomeno della radiazione elettromagnetica, che ci appare come continuo quando ragioniamo di luce o di trasmissioni radio TV, in realtà è il prodotto della azione di tante unità elementari.

Per esempio, nel caso degli smartphone, il segnale ha una potenza dell'ordine di  $10^{-8}$  W e ciò a frequenze di 900 MHz corrisponde a circa  $n = 10^{16}$  fotoni al secondo; in effetti  $P = n \mathcal{E} = n h \nu$  e dunque:

$$n = \frac{P}{h \nu} = \frac{10^{-8}}{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 9 \cdot 10^8} \approx 1/6 \cdot 10^{16} \text{ fotoni/sec}$$

nella tecnologia 4G un singolo bit di informazione è trasportato da qualche milione di fotoni.

Per osservare il comportamento individuale dei fotoni supponiamo di ridurre gradualmente la intensità del nostro fascio di luce polarizzata sino a sperimentare il carattere granulare della radiazione elettromagnetica.

Vediamo cosa accade quando la radiazione polarizzata di  $\alpha$  incontra un polaroid a polarizzazione orizzontale; cosa fa il singolo fotone?

Non può dividersi in due sulla base di  $\cos\alpha$ . Semplicemente in alcuni casi passa e in altri non passa seguendo i principi intrinsecamente probabilistici della meccanica quantistica e in quel caso  $\cos^2\alpha$  ci dà la probabilità che passi.

Nascono spontaneamente delle domande a cui la MQ dovrà dare una risposta. Per esempio, in cosa differiscono prima della misura due fotoni, uno che passa e un altro che non passa?

Se ci si chiede a cosa sia dovuta la polarizzazione ci limitiamo ad affermare che si tratta di una proprietà che ha a che fare con lo spin; per la precisione riguarda la direzione dello spin rispetto alla direzione di propagazione.

Supponiamo di inviare una successione di fotoni su un cristallo birifrangente, avverrà qualcosa di analogo a quanto illustrato in figura. Alcuni fotoni seguiranno il percorso del raggio ordinario e altri quello del raggio straordinario e risulteranno polarizzati secondo  $|H\rangle$  e  $|V\rangle$

### 6.6.2.5 Gli autovettori della polarizzazione

Un fotone che risulti polarizzato secondo un angolo  $\theta$  rispetto alla orizzontale, se indichiamo la polarizzazione H con il ket normalizzato  $|\rightarrow\rangle$  e quella verticale con  $|\uparrow\rangle$

$$|\theta\rangle = \cos\theta |\rightarrow\rangle + \sin\theta |\uparrow\rangle \quad (VI.6.71)$$

$$|\theta_{\perp}\rangle = -\sin\theta |\rightarrow\rangle + \cos\theta |\uparrow\rangle$$

Si ricordi che poiché gli angoli di polarizzazione appartengono all'intervallo  $[0,\pi]$  i vettori ruotati di  $\pi$  sono tra loro equivalenti e dunque:

$$|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \quad |\rightarrow\rangle = |\leftarrow\rangle \quad (VI.6.72)$$

Inoltre trattandosi di vettori ortonormali si ha:

$$\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\rightarrow|\rightarrow\rangle = 1 \quad (VI.6.73)$$

$$\langle\uparrow|\rightarrow\rangle = \langle\rightarrow|\uparrow\rangle = 0$$

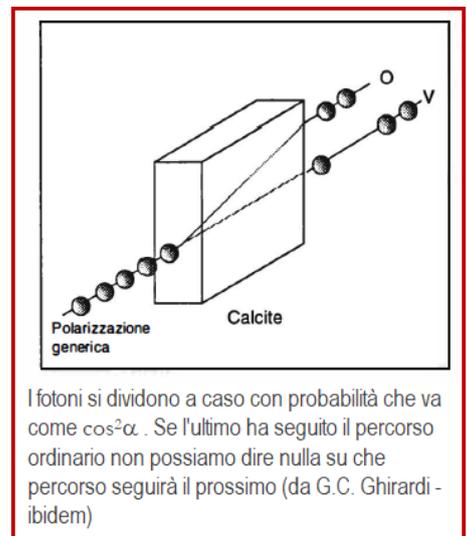
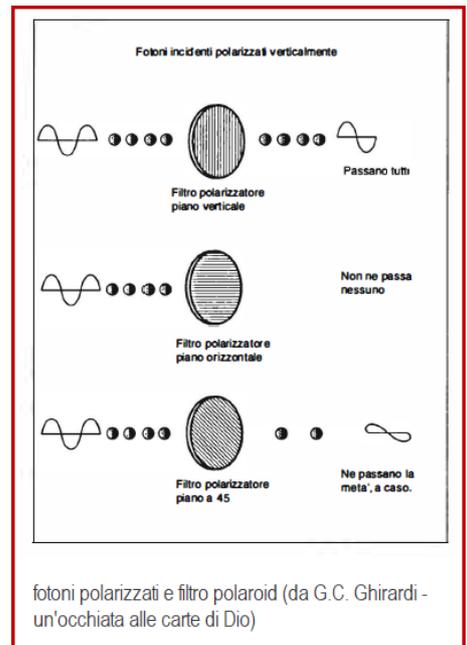
Così come il versore che dà la direzione è ottenuto sommando i due vettori lungo x e y con ampiezze  $\cos\varphi$  e  $\sin\varphi$  un polarizzatore caratterizzato da un angolo  $\varphi$  avrà uno stato:

$$|\varphi\rangle = \cos\varphi |\rightarrow\rangle + \sin\varphi |\uparrow\rangle \quad (VI.6.74)$$

Pertanto la ampiezza di probabilità che un fotone con polarizzazione  $\theta$  passi attraverso un polarizzatore di stato  $|\varphi\rangle$  sarà:

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\theta\rangle &= (\cos\varphi |\rightarrow\rangle + \sin\varphi |\uparrow\rangle)(\cos\theta |\rightarrow\rangle + \sin\theta |\uparrow\rangle) = \\ &= \cos\varphi \cos\theta + \sin\varphi \sin\theta = \cos(\theta - \varphi) \end{aligned} \quad 27$$

<sup>27</sup> Dove si è tenuto conto della ortonormalità e del fatto che i coefficienti sono reali e dunque non c'è problema di coniugati



Pertanto la probabilità  $P_\theta$  vale:

$$P_\theta = |\langle \phi | \theta \rangle|^2 = \cos^2(\theta - \phi) \tag{VI.6.75}$$

Che può essere pensata come la *legge di Malus* riferita al singolo fotone. Ragionando in termini di probabilità possiamo estendere ai fotoni quanto già visto per i fasci di luce.

### 6.6.2.6 Relazioni tra le diverse basi possibili

La scelta di usare  $\uparrow \rightarrow$  come base dello spazio ovviamente non è obbligatoria. Per esempio potremmo usare quella a  $45^\circ$  e  $135^\circ$ .

In effetti poiché:

$$|\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\rightarrow\rangle + |\uparrow\rangle) \tag{VI.6.76}$$

$$|\nwarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\rightarrow\rangle + |\uparrow\rangle)$$

Basta invertire la relazione e si ottiene:

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle) \tag{VI.6.77}$$

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle + |\nwarrow\rangle)$$

Quanto visto per l'angolo  $\pi/4$  ha una valenza del tutto generale e in proposito richiamiamo le trasformazioni di coordinate di un vettore euclideo nel piano:

$$\text{Se } \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a}_x' + \vec{a}_y'$$

$$a_x = a \cos \theta \quad a_y = a \sin \theta \tag{VI.6.78}$$

$$a_{x'} = a \cos(\theta - \phi) \quad a_{y'} = a \sin(\theta - \phi)$$

Torniamo ai vettori che descrivono la polarizzazione: supponiamo di avere se si sceglie una base ortogonale  $|\phi\rangle$  e  $|\phi_\perp\rangle$  ruotata di  $\phi$  rispetto alla orizzontale si ha:

$$|\theta\rangle = \cos \theta |\rightarrow\rangle + \sin \theta |\uparrow\rangle \tag{VI.6.79}$$

$$|\theta_\perp\rangle = -\sin \theta |\rightarrow\rangle + \cos \theta |\uparrow\rangle$$

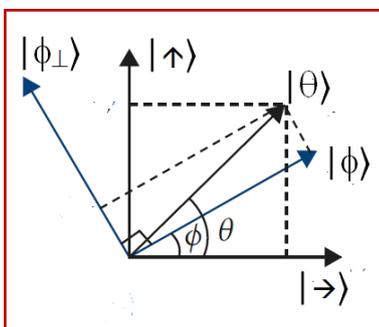
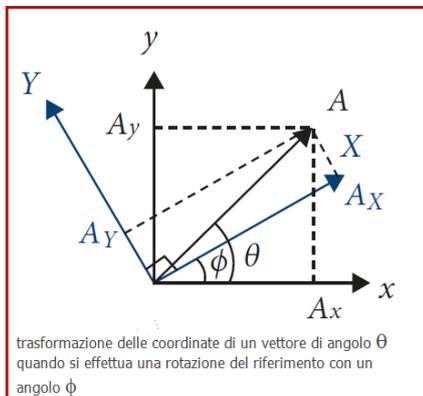
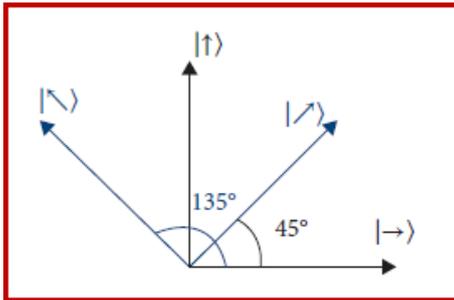
ma anche se ci si riferisce alla nuova base (il che consente di calcolare le probabilità nel caso in cui la misura di polarizzazione non sia riferita ad una base orizzontale, ma ad un polarizzatore inclinato di  $\phi$ )

$$|\theta\rangle = \cos(\theta - \phi) |\phi\rangle + \sin(\theta - \phi) |\phi_\perp\rangle \tag{VI.6.80}$$

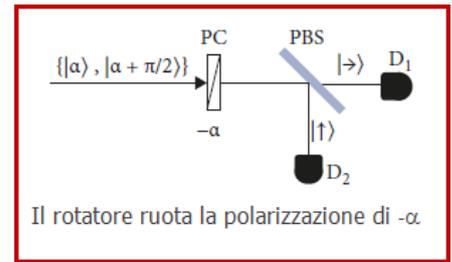
$$|\theta_\perp\rangle = -\sin(\theta - \phi) |\phi\rangle + \cos(\theta - \phi) |\phi_\perp\rangle$$

Dunque se si misura la polarizzazione riferita ad una nuova base si ottiene ancora la stessa espressione ma mutano i coefficienti, e con essi, le ampiezze di probabilità

Poiché un divisore di fascio (*beam splitter*) risulterebbe scomodo da ruotare nel caso in cui si dovessero fare misure di polarizzazione secondo un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale si utilizza prima del *beam splitter* un rotatore di polarizzazione (*Pocket Cell* - PC). Si tratta di un dispositivo elettro-ottico che è in grado, agendo sulla tensione di alimentazione, di



ruotare il piano di polarizzazione dei fotoni di un angolo  $-\alpha$ , a piacere, prima che il fotone venga inviato al beam splitter (PBS). In questo modo la attivazione di  $D_1$  indica che il fotone in ingresso aveva una polarizzazione  $\alpha$  mentre  $D_2$  indica una polarizzazione  $\alpha + \frac{1}{2} \pi$ .



### 6.6.3 L'ENTANGLEMENT

*Entanglement* vuol dire *intreccio* e si tratta di una condizione che si verifica quando un sistema di particelle presenta uno stato che non risulta fattorizzabile in realtà individuali ovvero le diverse particelle presentano una sorta di *legame sotterraneo* del tutto indipendente dalla loro collocazione spaziale.

In uno stato entangled i singoli componenti perdono la loro individualità ed hanno un senso solo se vengono considerati come un tutto.

Si tratta di uno degli aspetti paradossali della MQ dovuto al principio di sovrapposizione in base al quale se un sistema può essere descritto da uno stato  $|\psi_1\rangle$  o da uno stato  $|\psi_2\rangle$  anche qualunque combinazione lineare dei due vettori è uno stato del sistema.

Così se sia  $|\psi_1\rangle$  sia  $|\psi_2\rangle$  risultano fattorizzabili in generale non lo è  $c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle$  e tale stato è di tipo *entanglement*.

Il formalismo della MQ consente anche di misurare il grado di entanglement con una grandezza compresa tra 0 e 1.<sup>28</sup>

#### 6.6.3.1 Un esempio di stato entangled: il singoletto

Consideriamo come esempio il caso di due fotoni A e B che siano stati generati nello stato, detto di *singoletto*:<sup>29</sup>

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\rightarrow\rangle|\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle|\rightarrow\rangle) \tag{VI.6.81}$$

e che si propagano nella stessa direzione in versi opposti.

Supponiamo che i due sperimentatori Alice e Bob siano molto lontani tra loro ed eseguano delle misure di polarizzazione in sequenza prima Alice e successivamente Bob con un intervallo temporale minore di quello che un segnale luminoso impiegherebbe a percorrere la distanza AB.

Se Alice fa una misura di tipo orizzontale ci sono solo due possibilità: o trova  $|\rightarrow\rangle$  e in quel caso Bob trova  $|\uparrow\rangle$  o accade l'esatto contrario con probabilità  $\frac{1}{2}$ .

Fin qui nulla di strano, succede la stessa cosa anche in ambito classico. Se spedisco due palle di colore diverso (rossa e verde) e Alice si trova una palla rossa, quella di Bob sarà verde e viceversa e la probabilità di Alice è  $\frac{1}{2}$  per la palla rossa e  $\frac{1}{2}$  per quella verde.

Le cose cambiano radicalmente se Alice decide di fare delle misure a  $45^\circ$ :

<sup>28</sup> Dato il carattere introduttivo del nostro corso non ci occuperemo di questo aspetto.

<sup>29</sup> A e B oltre che le prime lettere dell'alfabeto, per tradizione consolidata, sono diventati le iniziali dei due sperimentatori del processo entangled Alice e Bob. Il primo termine dei prodotti si riferirà ad A e il secondo a B e dunque eviteremo la ridondanza di scrivere i due pedici A e B tranne quando ci sia il rischio di fraintendimenti

in quel caso, se applichiamo le (6.77) nella (6.81) avremo:

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle)$$

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nearrow\rangle + |\nwarrow\rangle)$$

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow\rangle|\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle|\rightarrow\rangle) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}[(|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle)|\uparrow\rangle - (|\nearrow\rangle + |\nwarrow\rangle)|\rightarrow\rangle] = \quad (\text{V.6.82})$$

$$= \frac{1}{2} [|\nearrow\rangle(|\uparrow\rangle - |\rightarrow\rangle) - |\nwarrow\rangle(|\uparrow\rangle + |\rightarrow\rangle)] \quad (\text{V.6.83})$$

Dunque se Alice misura  $|\nearrow\rangle$  il fotone di Bob collassa in:

$$\langle \nearrow | \psi_{AB} \rangle = \frac{1}{2} (|\uparrow_B\rangle + |\rightarrow_B\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |\nearrow_B\rangle \equiv |\nearrow_B\rangle \quad ^{30}$$

E naturalmente se Alice misura  $|\nwarrow\rangle$  il fotone di Bob collassa in:

$$\langle \nwarrow | \psi_{AB} \rangle = -\frac{1}{2} (|\uparrow_B\rangle + |\rightarrow_B\rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}} |\nwarrow_B\rangle \equiv |\nwarrow_B\rangle \quad ^{31}$$

E dunque quello che misura Bob viene a dipendere da quello che fa Alice e si potrebbe ripetere il calcolo per una direzione qualsiasi ma penso che l'essenza della questione sia stata evidenziata.

C'è un altro aspetto interessante che riguarda gli stati entangled del tipo che stiamo considerando e cioè che *l'espressione dello stato non muta se si cambia la base di riferimento*. Proseguiamo nel calcolo sostituendo nella

(6.82) anche le espressioni per  $|\rightarrow_B\rangle$  e  $|\uparrow_B\rangle$

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle + |\nwarrow\rangle) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle + |\nwarrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle) \right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} [|\nearrow\rangle|\nearrow\rangle + |\nearrow\rangle|\nwarrow\rangle - |\nwarrow\rangle|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle|\nwarrow\rangle -$$

$$- (|\nearrow\rangle|\nearrow\rangle - |\nearrow\rangle|\nwarrow\rangle + |\nwarrow\rangle|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle|\nwarrow\rangle)]$$

Ed eliminando i termini opposti e sommando quelli concordi:

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\nearrow\rangle|\nwarrow\rangle - |\nwarrow\rangle|\nearrow\rangle] \quad (\text{VI.6.84})$$

Tutto ciò non ha a che fare con il fatto che si tratti di uno stato entangled ma con la presenza di due coefficienti uguali e presa una direzione qualsiasi  $\alpha$  si avrebbe ancora:

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha\rangle|\alpha_\perp\rangle - |\alpha_\perp\rangle|\alpha\rangle] \quad (\text{VI.6.85})$$

Lasciamo al lettore, per esercizio la dimostrazione che la stessa proprietà è posseduta anche dallo stato entangled:

<sup>30</sup> Per la normalizzazione degli autostati

<sup>31</sup> Il segno meno si trascura perché le polarizzazioni sono definite a meno di  $\pi$

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle + |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle] \quad (\text{VI.6.86})$$

Nel caso di due fotoni, per quanto attiene alla polarizzazione, lo stato più generale sarà del tipo:<sup>32</sup>

$$|\psi\rangle = c_1 |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + c_2 |\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle + c_3 |\uparrow\rangle|\rightarrow\rangle + c_4 |\rightarrow\rangle|\uparrow\rangle$$

Con la condizione di normalizzazione:

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + |c_4|^2 = 1$$

### 6.6.3.2 Esempi di stati fattorizzabili

1. Si consideri lo stato:  $|\psi\rangle = c_1 |\rightarrow\rangle|\uparrow\rangle + c_2 |\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle$  con  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ . Fattorizzarlo.

$|\psi\rangle = |\rightarrow\rangle(c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\rightarrow\rangle)$  e dunque il sistema è fattorizzato ed è costituito da un primo fotone con polarizzazione orizzontale e da un secondo con polarizzazione generica

2. Si consideri lo stato:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} [|\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle - |\rightarrow\rangle|\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle|\rightarrow\rangle + |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle] \text{ e}$$

si dimostri che si tratta di uno stato fattorizzato e normalizzato.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} [|\rightarrow\rangle(|\rightarrow\rangle - |\uparrow\rangle) - |\uparrow\rangle(|\rightarrow\rangle - |\uparrow\rangle)] =$$

$$= \frac{1}{2} [(|\rightarrow\rangle - |\uparrow\rangle)(|\rightarrow\rangle - |\uparrow\rangle)] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\rightarrow\rangle - |\uparrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (|\rightarrow\rangle - |\uparrow\rangle) = -|\kappa\rangle(-|\kappa\rangle)$$

ma poiché i vettori di polarizzazione sono definiti a meno di  $\pi$

$$|\psi\rangle = |\kappa\rangle|\kappa\rangle$$

### 6.6.3.3 Esempio di stato non fattorizzabile:

Dimostrare che lo stato  $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle + |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle)$  non è fattorizzabile

Procediamo per assurdo e supponiamo che tale fattorizzazione sia possibile; in quel caso lo stato  $\psi$  si potrà scrivere come prodotto di due stati nella forma:

$(c_1 |\rightarrow\rangle + c_2 |\uparrow\rangle)(c_3 |\rightarrow\rangle + c_4 |\uparrow\rangle)$  dove  $c_1, c_2, c_3, c_4$  sono delle costanti da determinare; a questo scopo svolgiamo i prodotti:<sup>33</sup>

$$c_1 c_3 |\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle + c_2 c_4 |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + c_1 c_4 |\rightarrow\rangle|\uparrow\rangle + c_2 c_3 |\uparrow\rangle|\rightarrow\rangle$$

d'altra parte per confronto con lo stato originale dovrà essere:

<sup>32</sup> Si può evitare di distinguere simbolicamente il primo dal secondo se si suppone che il primo sia quello a sinistra

<sup>33</sup> Prestare attenzione al fatto che questo prodotto non è commutativo perché i termini a sinistra riguardano la prima particella e quelli a destra la seconda. Per essere completamente corretti dovremmo usare un nuovo simbolo (prodotto tensoriale) e studiarne tutte le proprietà e caratteristiche  $\otimes$ .

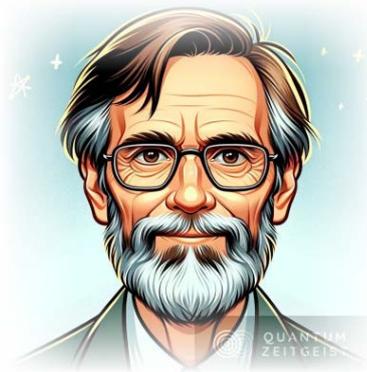
$$c_1 c_3 = c_2 c_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad c_1 c_4 = c_2 c_3 = 0$$

dunque  $c_1 = 0 \vee c_4 = 0$  e anche  $c_2 = 0 \vee c_3 = 0$

il che è in contrasto con  $c_1 c_3 = c_2 c_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Possiamo concludere che lo stato  $\psi$  non è fattorizzabile.

#### 6.6.4 IL PARADOSSO EPR E IL CONTESTO CHE PORTA ALLE DISUGUAGLIANZE DI BELL E CHSH



Il percorso che ha portato John Bell (Belfast 1928 – Ginevra 1990) ad enunciare la disuguaglianza che porta il suo nome parte da lontano e riguarda alcuni rilievi avanzati nel 1935 e noti come argomento EPR con cui si sottolineavano alcuni aspetti *insoddisfacenti* della MQ che avevano portato Einstein ad affermarne il carattere provvisorio perché ne venivano colti elementi di probabile *incompletezza*.

L'articolo di EPR si divide in 4 parti: <sup>34</sup>

##### 6.6.4.1 un preambolo di natura epistemologica

Nella prima parte vengono date le definizioni di completezza di una teoria fisica e viene stabilito un criterio di realtà.

**A1** : condizione necessaria per la completezza di una teoria è che ogni elemento di realtà trovi una sua controparte all'interno della teoria

**A2** : condizione sufficiente per garantire la condizione di realtà “*se senza disturbare in alcun modo il sistema si può prevedere con certezza il valore di una grandezza fisica allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a quella grandezza*”

##### 6.6.4.2 un riassunto delle principali caratteristiche della meccanica quantistica

Si sottolinea che la non commutatività degli operatori associati alle osservabili fa sì che la conoscenza precisa di una preclude la conoscenza dell'altra.

Delle due l'una “**1** o la descrizione quantomeccanica della realtà espressa tramite la funzione d'onda è incompleta o **2** quando gli operatori corrispondenti a due grandezze fisiche non commutano tali grandezze non possono essere contemporaneamente reali”.

Detto diversamente se si accetta il principio di completezza ne segue che queste grandezze fanno parte della descrizione del mondo fisico e dunque deve essere possibile prevederne il valore contro quanto prevede la teoria.

<sup>34</sup> Per la la discussione su EPR ci siamo rifatti al classico di Max Jammer “the philosophy of quantum mechanics The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective” – J.Wiley & Sons 1974 . Quasi tutti i testi moderni di MQ non si addentrano nei dettagli dell'esperimento EPR e preferiscono discutere l'esperimento del tutto equivalente ma più chiaro da intendere che fu proposto da David Bohm e che invece di utilizzare due grandezze continue (con infiniti autovalori e autovettori) discute il caso di due particelle con spin antiparalleli.

### 6.6.4.3 la presentazione dell'esperimento mentale entangled

L'esperimento mentale proposto riguarda due particelle che hanno interagito per un dato periodo di tempo e quindi si muovono liberamente.<sup>35</sup>

La misura di  $p_1$  in virtù della conservazione della quantità di moto consente di prevedere con certezza il valore di  $p_2$  senza eseguire su di essa alcuna misura e lo stesso (in virtù delle caratteristiche dello stato assegnato riguarda il valore di  $x_2$  sulla base della misura di  $x_1$ ).

Dunque in base al criterio  $\boxed{A2}$  ad entrambe le grandezze (posizione e quantità di moto della seconda particella) si può assegnare una realtà fisica.



### 6.6.4.4 la conclusione sulla incompletezza della MQ

Nella quarta parte si analizza la disgiunzione posta nella seconda.

Se si nega la  $\boxed{1}$  cioè se si assume che la MQ sia una teoria completa allora il risultato dell'esperimento mentale porta a concludere che due grandezze fisiche espresse da due operatori non commutativi ricadano nella condizione di realtà. Ma la negazione della  $\boxed{1}$  porta con sé la negazione della  $\boxed{2}$  (aut aut) e dunque dobbiamo concludere che la MQ è una teoria non completa.

In realtà il ragionamento di EPR si basa su due premesse esplicitate (criterio di realtà e criterio di completezza) e su altre premesse che vengono sottintese:

- **principio di località:** se nel momento della misura su due sistemi che non stanno interagendo, qualunque cosa si sia fatta sul primo sistema non può determinare alcun cambiamento sul secondo. Ovvero gli elementi di realtà fisica posseduti oggettivamente da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.
- **assunzione di validità:** le previsioni statistiche della MQ, almeno per quanto riguarda l'argomento in esame sono confermate dall'esperienza.
- **principio di separabilità:** il mondo può essere analizzato in termini di *elementi di realtà* distinti e dotati di una loro identità (il che va in contrasto con gli stati entangled)

### 6.6.4.5 Argomento EPR nella riformulazione di Bohm

I problemi sollevati da Einstein furono inizialmente respinti dalla comunità scientifica beata dei successi che la MQ otteneva nello spiegare la struttura della materia. Come al solito fu Bohr a replicare ad Einstein e la replica fu considerata una sorta di pietra tombale anche se un altro dei padri della MQ, Schrödinger, nello stesso periodo sollevò dubbi e perplessità proprio a partire dal tema dell'entanglement, termine che fu usato per la prima volta proprio da lui.

Einstein parlando di completamento deterministico della teoria non avanza esplicitamente l'ipotesi che essa si possa realizzare attraverso variabili nascoste e la ragione è dovuta al fatto che qualche anno prima il fisico-matematico tedesco John von Neumann aveva effettuato una analisi critica e strutturato l'intera MQ nel suo *I fondamenti matematici della*

<sup>35</sup> Non entriamo nei dettagli tecnici che richiederebbero l'uso del calcolo integrale e della funzione delta di Dirac



*meccanica quantistica* (1932). In questa opera si dava tra l'altro la dimostrazione che non si poteva costruire il completamento della MQ attraverso l'uso di variabili nascoste.

L'argomentazione di von Neumann è corretta ma risultano sbagliate le premesse (si richiede più del dovuto) e infatti David Bohm, influenzato da discussioni a Princeton con Einstein tra il 1951 e il 1952 costruirà una teoria deterministica equivalente alla MQ e basata su variabili nascoste detta *teoria dell'onda pilota*.

In questa sua fase di passaggio culturale si ha la pubblicazione della sua *Quantum theory* in cui inizia il suo distacco dalle interpretazioni standard della MQ. Nella immagine qui a lato ho sovrapposto alla cover della prima edizione del testo di Bohm i paragrafi dedicati all'esame del paradosso EPR. Si guardi il punto 19 e si osservi che meno di un anno dopo lo stesso Bohm darà una descrizione della MQ in termini di variabili nascoste (bizzarrie della storia della fisica ...).

In questo testo Bohm presenta la riformulazione dell'argomento EPR in una versione semplificata e più comprensibile che da allora venne utilizzata per le riflessioni sull'entanglement.<sup>36</sup>

Supponiamo di avere una molecola contenente due atomi in uno stato in cui lo spin totale sia zero e lo spin di ciascun atomo sia  $\frac{1}{2} \hbar$ . In parole povere, ciò significa che lo spin di ciascuna particella punta in una direzione esattamente opposta a quella dell'altro, ammesso che si possa dire che lo spin abbia una direzione definita.

Supponiamo ora che la molecola venga disintegrata da qualche processo che non cambia il momento angolare totale. I due atomi inizieranno a separarsi e lo faranno cessando presto di interagire in modo apprezzabile. Il loro momento angolare di spin complessivo resta pari a zero, perché per ipotesi non ha agito alcun momento di coppia sul sistema.

Ora, se lo spin fosse una versione classica del momento angolare, l'interpretazione di questo processo sarebbe la seguente: Quando i due atomi erano insieme sotto forma di una molecola, ciascun componente del momento angolare di ciascun atomo avrebbe un valore definito opposto a quello dell'altro, formando così il momento angolare totale uguale a zero.

Dopo la separazione ogni atomo continuerebbe ad avere ogni componente del suo momento angolare di spin opposta a quello dell'altro. I due vettori di momento angolare di spin sarebbero quindi essere correlati. Queste correlazioni furono originariamente prodotte quando gli atomi interagirono in modo tale da formare una molecola con spin totale nullo, ma dopo che gli atomi si sono separati, le correlazioni vengono mantenute deterministicamente in maniera separata.

Supponiamo ora di misurare il momento angolare di spin di una qualsiasi delle particelle, diciamo la n. 1. A causa dell'esistenza di correlazioni, si può concludere immediatamente che il vettore momento angolare dell'altra particella (n. 2) è uguale e contrario a quello del n. 1. In questo modo si può misurare il momento angolare della particella n. 2 indirettamente misurando il corrispondente vettore della particella n. 1.



<sup>36</sup> David Bohm (1917-1992) era un allievo di Oppenheimer e come lui fu coinvolto nella fase della caccia alle streghe. Princeton dove operava, nonostante richieste di Einstein, non gli rinnovò il contratto e fu dunque costretto ad emigrare nel 1950, prima in Brasile e poi in Israele. Nel 1951 pubblicò un importante testo di MQ in cui inizia il suo distacco dalle interpretazioni standard della MQ.

Vediamo ora come viene analizzato questo esperimento dalla teoria ca. Qui, lo sperimentatore può misurare la componente  $x$ ,  $y$  o  $z$  dello spin della particella  $n. 1$ , ma non più di una di esse alla volta.

Tuttavia, come vedremo, risulta ancora che qualunque componente venga misurata, i risultati sono correlati, in modo che se viene misurata la stessa componente dello spin dell'atomo  $n. 2$  essa risulterà sempre avere il valore opposto. Questo significa che una misurazione di qualsiasi componente dello spin dell'atomo  $n. 1$  fornisce, come nella teoria classica, una misurazione indiretta dello stesso componente dello spin dell'atomo  $n. 2$ .

Poiché, per ipotesi, le due le particelle non interagiscono più, abbiamo ottenuto un modo per misurare an componente arbitraria dello spin della particella  $n. 2$  senza in alcun modo disturbare quella particella. Se accettiamo la definizione di elemento di realtà suggerita da ERP, è chiaro che dopo aver misurato  $\sigma_z$  per la particella 1, allora  $\sigma_z$  per la particella 2 debba essere considerata come un elemento di realtà, esistente separatamente nella particella  $n. 2$  presa a sé.

Però, se tutto ciò è vero, questo elemento di realtà deve essere esistito nella particella  $n. 2$  pari anche prima che la misurazione di  $\sigma_z$  per la particella  $n. 1$  abbia avuto luogo. Poiché non c'è stata interazione con la particella  $n. 2$ , il processo di misura non può aver influenzato questa particella in alcun modo.

Ma ricordiamo ora che, in ogni caso, l'osservatore è sempre libero di riorientare l'apparecchio in una direzione arbitraria mentre gli atomi sono ancora in volo, e quindi a ottiene un valore definito (ma imprevedibile) della componente di spin qualsiasi direzione venga scelta. Poiché ciò può venir realizzato senza disturbare in alcun modo il secondo atomo, concludiamo che se il criterio (2) di ERP è applicabile, devono esistere elementi della realtà definiti con precisione per il secondo atomo, corrispondente alla definizione simultanea di tutti e tre componenti del suo spin.

Poiché però la funzione d'onda può specificare, al massimo, solo uno di questi componenti alla volta con precisione assoluta, siamo portati alla conclusione che la funzione d'onda non fornisca una descrizione completa di tutti gli elementi della realtà esistenti nel secondo atomo.

Se questa conclusione fosse valida, allora dovremmo cercarne una nuova teoria in base alla quale fosse possibile una descrizione più completa. Vedremo, però, nella Sez. 18, che l'analisi fornita da ERP comporta in maniera integrale le assunzioni implicite (3) e (4) che il mondo sia costituito da elementi di realtà esistenti separatamente e precisamente definiti. La teoria quantistica, tuttavia, implica un quadro completamente diverso della struttura del mondo a livello microscopico. Ciò comporta, come vedremo, un'interpretazione perfettamente razionale dell'ipotetico esperimento di ERP *nel quadro attuale della teoria*.

Bohm coglie qui l'aspetto fondamentale della questione, la non separabilità dei sistemi entangled che non possiedono proprietà individuali sino al momento in cui la misura fa collassare lo stato in una condizione ben determinata.

#### 6.6.4.6 Reinterpretazione di EPR attraverso l'esperimento con la polarizzazione dei fotoni <sup>37</sup>

In questo caso si considera lo stato entangled di due fotoni che si trovano rispettivamente in due regioni A e B spazialmente separate

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle + |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle] \quad (\text{VI.6.87})$$

<sup>37</sup> In questa parte seguiamo l'analisi che ne fa Giancarlo Ghirardi in "una occhiata alle carte di Dio" un testo di cui consigliamo la lettura integrale



E al tempo  $t$  Alice sottopone il primo fotone ad un test di polarizzazione verticale; avviene un collasso dello stato che si porta in

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle]$$

A questo punto Alice può prevedere con certezza che se Bob dovesse sottoporre il secondo fotone ad un test di polarizzazione verticale questi lo supererebbe e quindi si può affermare che dopo la misura il secondo fotone possiede un elemento di realtà fisica: ha polarizzazione verticale.

Secondo il principio di località non può essere stata la misura in A a determinare tale proprietà e dunque essa doveva pre-esistere alla misura.

Ma come sappiamo il risultato delle misure di polarizzazione dipende dalla direzione scelta. Se, per esempio, Alice decidesse di fare un test a ad angolo  $\alpha$ , poiché lo stato, prima della misura, può anche essere scritto come:

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha\rangle|\alpha\rangle + |\alpha_{\perp}\rangle|\alpha_{\perp}\rangle] \quad (VI.6.88)$$

il fotone potrebbe avere probabilità  $\frac{1}{2}$  di superarlo o di non superarlo.

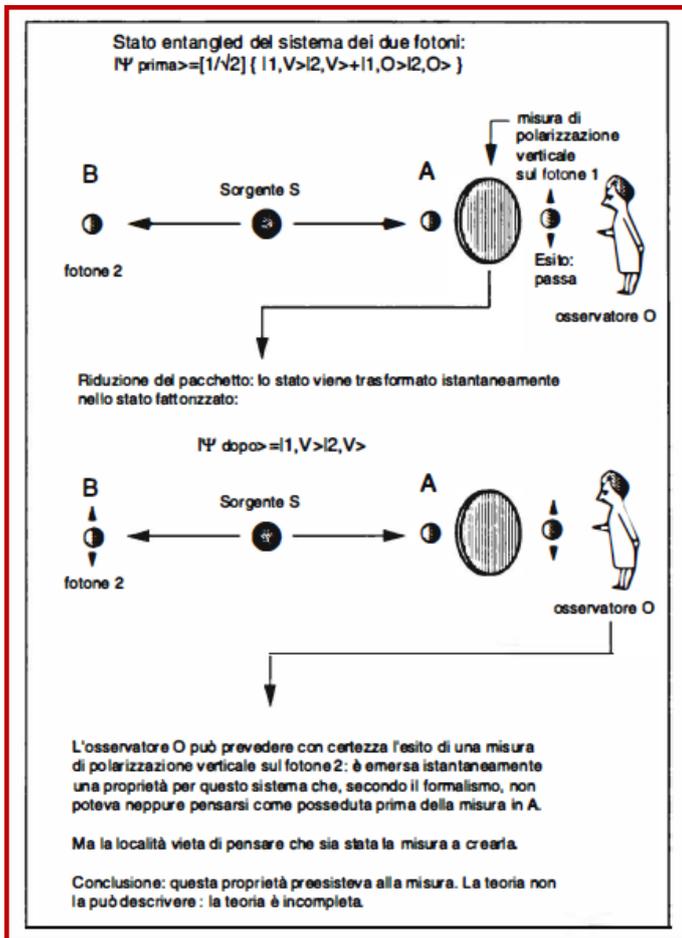
Se lo supera anche il fotone in B risulta polarizzato secondo  $|\alpha\rangle$  mentre se non lo supera quello in B risulterà polarizzato  $|\alpha_{\perp}\rangle$ .

Supponiamo che lo superi il fotone in B che già possedeva la polarizzazione verticale dovrebbe contemporaneamente possedere la polarizzazione  $\alpha$ . Ma poiché tali

polarizzazioni sono incompatibili...

L'argomento EPR non afferma che si possano misurare simultaneamente osservabili incompatibili ma che, poiché tali proprietà sono oggettivamente possedute dal sistema e la MQ non è in grado di descrivere tale situazione, si tratta di una teoria incompleta.

Nella immagine qui a lato la descrizione pittorica che ne dà G.C: Ghirardi (op.cit.)



## 6.7 La M.Q. e la non località

### 6.7.1 INTRODUZIONE

Tra la fine del XX secolo e il primo decennio del XXI secolo si è messa la parola fine alla discussione sui temi sollevati da Einstein negli anni 30 del '900, ai tentativi di costruire un *completamento* deterministico della MQ e si è acclarato per via teorica e attraverso conferme sperimentali che la M.Q. è una teoria *genuinamente non locale*.

### 6.7.2 LA DISUGUAGLIANZA DI BELL

John Bell avendo studiato a fondo la teoria a variabili nascoste di Bohm, il cui difetto principale egli individuava nel carattere non locale delle variabili; pertanto optò per la ricerca di un criterio sperimentale che consentisse di porre un termine alle discussioni innescate dall'argomento EPR.

Nel farlo, la sua speranza era quella di riuscire a costruire un modello locale e deterministico. Preso atto del proprio fallimento decise di tentare di dare un criterio per *dimostrare in generale che risultasse impossibile dare conto delle correlazioni quantistiche rimanendo entro uno schema locale*.

Ci riuscì enunciando una disuguaglianza, che porta il suo nome.

Bell suppone che si abbiano due esperimenti A e B ciascuno caratterizzato da un orientamento spaziale  $\alpha$  e  $\beta$  e che questi esperimenti possano avere solamente due risultati: esito favorevole ed esito sfavorevole.<sup>38</sup>

Si suppone di eseguire gli esperimenti N volte con  $N \gg 1$  in modo di correlare le frequenze relative dei risultati alle probabilità. A questo scopo Bell introduce una funzione di correlazione  $v(\alpha, \beta)$  così definita. Tutte le volte che in entrambi gli esperimenti si ha un esito concorde (entrambi favorevoli o entrambi sfavorevoli) si dà valore +1 (correlazione) mentre si dà valore -1 (anticorrelazione) quando uno è favorevole e l'altro sfavorevole o viceversa.

$$v(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=1}^N (\pm 1)_i}{N} \quad (VI.6.89)$$

Consideriamo ora tre esperimenti diversi che indichiamo con  $(\alpha, \beta), (\beta, \gamma)$  e  $(\alpha, \gamma)$  ciascuno dei quali venga eseguito N volte e definiamo la funzione di Bell.

$$B_{\text{LOC}} = |v(\alpha, \beta) - v(\alpha, \gamma)| - v(\gamma, \beta) \quad (VI.6.90)$$

Bell dimostra che in una teoria a variabili nascoste di tipo locale caratterizzata dal fatto che all'atto della loro generazione in uno stato entangled le particelle che vengono inviate verso A e verso B si siano in qualche modo accordate sul come comportarsi di fronte ad una data direzione spaziale, vale necessariamente la relazione:<sup>39</sup>

<sup>38</sup> Bell ha in mente la versione alla Bohm dell'esperimento mentale EPR basato sull'utilizzo di particelle con spin correlati

<sup>39</sup> Non diamo qui la dimostrazione perché la relazione di Bell, in contrasto con le previsioni della MQ ma di dubbia realizzabilità sperimentale, sarà presto sostituita da una



John Bell al CERN con alla lavagna la sua disuguaglianza

$$B_{\text{LOC}} = |v(\alpha, \beta) - v(\alpha, \gamma)| - v(\gamma, \beta) \leq 1 \quad (\text{VI.6.91})$$

Si dimostra abbastanza facilmente che la diseguaglianza viene violata in ambito quantistico: coppie di fotoni o di elettroni in uno stato entangled e sottoposti ad esperimenti con i polarizzatori o con i magneti alla Stern & Gerlach, prevedono, per alcune direzioni:

$$B_{\text{MQ}} > 1 \quad (\text{VI.6.92})$$

E dunque che la MQ è incompatibile con teorie a variabili nascoste di tipo locale.

### 6.7.3 LA DISEGUAGLIANZA DI CLAUSER, HORNE, SHIMONY, HOLT

#### 6.7.3.1 Contesto ed enunciato della diseguaglianza

Si tratta di una diseguaglianza proposta nel 1969 e che presenta il vantaggio di prevedere una realizzazione sperimentale più sicura rispetto a quanto fattibile con quella di Bell.

Si hanno sempre due laboratori spazialmente separati ma questa volta sono possibili quattro esperimenti (direzioni spaziali) da indagare.<sup>40</sup>

Abbiamo dunque due laboratori  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  e in ciascuno di essi vengono eseguiti due esperimenti che chiameremo  $A, A'$  e  $B, B'$ .

Ipotizziamo che ciascun esperimento possa avere solo due risultati: positivo e negativo che indicheremo con  $\{+, -\}$

Per ragioni puramente combinatorie gli esperimenti possibili in totale sono 4:  $AB, AB', A'B, A'B'$

Gli esiti possibili sono sempre quattro dati dalle coppie:

$$\{(+,+), (-,-), (+,-), (-,+)\} = \{(\sigma, \rho)\}$$

I primi due risultati rappresentano una situazione di correlazione mentre gli altri due quella di anticorrelazione. Le due variabili  $\sigma$  e  $\rho$  vengono utilizzate per rappresentare genericamente i possibili risultati.

Per quanto riguarda gli esiti degli esperimenti si possono avere 4 probabilità congiunte  $P_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\sigma, \rho)$  precisamente:

$$P_{AB}(+, +), P_{AB}(-, -), P_{AB}(+, -), P_{AB}(-, +)$$

Definiamo ora una funzione di correlazione attraverso la differenza tra le probabilità con esiti correlati e quelle con esiti anti correlati:

$$E_{AB} = [P_{AB}(++) + P_{AB}(- -)] - [P_{AB}(+-) + P_{AB}(-+)] \quad (\text{VI.6.93})$$

Permutando sui diversi esperimenti le funzioni di correlazione possibili sono quattro:  $E_{AB} | E_{AB'} | E_{A'B} | E_{A'B'}$

Attraverso le funzioni di correlazione possiamo costruire a nostra volta delle funzioni che ne sommano tre sottraendone una. Queste funzioni che indicheremo con  $A_{\text{CHSH}}, B_{\text{CHSH}}, C_{\text{CHSH}}, D_{\text{CHSH}}$  sono quelle che definiscono la diseguaglianza:

relazione più generale più idonea alla verifica sperimentale, la diseguaglianza CHSH al cui raffinamento darà nuovi contributi lo stesso Bell.

<sup>40</sup> Tra le molte dimostrazioni disponibili ho scelto di utilizzare quella che propone il professor Massimiliano Sassoli de Bianchi che ha il vantaggio di astrarre completamente dall'ambito quantistico e di soffermarsi esclusivamente sul tema delle correlazioni tra esperimenti

$E_{AB}$	$E_{AB'}$	$E_{A'B}$	$E_{A'B'}$
-	+	+	+
+	-	+	+
+	+	-	+
+	+	+	-

$$\begin{aligned}
 A_{CHSH} &= -E_{AB} + E_{AB'} + E_{A'B} + E_{A'B'} \\
 B_{CHSH} &= +E_{AB} - E_{AB'} + E_{A'B} + E_{A'B'} \\
 C_{CHSH} &= +E_{AB} + E_{AB'} - E_{A'B} + E_{A'B'} \\
 D_{CHSH} &= +E_{AB} + E_{AB'} + E_{A'B} - E_{A'B'}
 \end{aligned}
 \tag{VI.6.94}$$

Dice la diseuguaglianza CHSH che:

$$|A_{CHSH}| \leq 2 \quad |B_{CHSH}| \leq 2 \quad |C_{CHSH}| \leq 2 \quad |D_{CHSH}| \leq 2
 \tag{VI.6.95}$$

Ovviamente poiché la situazione è totalmente simmetrica rispetto al cambio di variabili basterà dimostrarlo per una di esse.



### 6.7.3.2 Dimostrazione

Le ipotesi relative alle correlazioni e alla presenza di variabili nascoste verranno introdotte ma mano che si utilizzano ma saranno parte integrante del teorema.

#### 6.7.3.2.1 Primo passo eventi indipendenti

Prendiamo dunque in considerazione la funzione:

$$|B_{CHSH}| = | +E_{AB} - E_{AB'} + E_{A'B} + E_{A'B'} |$$

E ipotizziamo inizialmente che le misure vengano fatte separatamente e che non ci sia correlazione, che cioè sia:

$$P_{AB}(\sigma, \rho) = P_A(\sigma)P_B(\rho)
 \tag{VI.6.96}$$

Dimostriamo che in questo caso (eventi indipendenti) vale la stessa relazione anche per le funzioni di correlazione; infatti:

$$\begin{aligned}
 E_{AB} &= [P_{AB}(++) + P_{AB}(- -)] - [P_{AB}(+-) + P_{AB}(-+)] = \\
 &= P_A(+ )P_B(+ ) + P_A(- )P_B(- ) - P_A(+ )P_B(- ) - P_A(- )P_B(+ ) = \\
 &= P_A(+ ) [P_B(+ ) - P_B(- )] - P_A(- ) [P_B(+ ) - P_B(- )] = \\
 &= [P_A(+ ) - P_A(- )] [P_B(+ ) - P_B(- )] = E_A E_B
 \end{aligned}$$

$$E_{AB} = E_A E_B
 \tag{VI.6.97}$$

osserviamo inoltre che le grandezze  $E_A$  ed  $E_B$  sono limitate:

$$-1 \leq E_A \leq 1 \quad -1 \leq E_B \leq 1
 \tag{VI.6.98}$$

e che i due valori estremi corrispondono al caso di esiti sempre positivi o sempre negativi.

$$\begin{aligned}
 |B_{CHSH}| &= | +E_{AB} - E_{AB'} + E_{A'B} + E_{A'B'} | = \\
 &= | E_A E_B - E_A E_{B'} + E_{A'} E_B + E_{A'} E_{B'} | = \\
 &= | E_A (E_B - E_{B'}) + E_{A'} (E_B + E_{B'}) | \leq^{41}
 \end{aligned}$$

<sup>41</sup> Per la diseuguaglianza triangolare e per la proprietà del modulo di un prodotto

$$\leq |E_A| |E_B - E_{B'}| + |E_A| |E_B + E_{B'}| \leq \text{per la (6.98)}$$

$$\leq |E_B - E_{B'}| + |E_B + E_{B'}|$$

Per le grandezze entro modulo si possono presentare 4 casi che indicheremo con a, b, c, d e che esamineremo separatamente:

$E_B - E_{B'}$	$E_B + E_{B'}$
+	+
+	-
-	+
-	-

- a)  $|E_B - E_{B'}| + |E_B + E_{B'}| = E_B - E_{B'} + E_B + E_{B'} = 2 E_B \leq 2$
- b)  $|E_B - E_{B'}| + |E_B + E_{B'}| = E_B - E_{B'} - E_B - E_{B'} = - 2 E_{B'} \leq 2$
- c)  $|E_B - E_{B'}| + |E_B + E_{B'}| = -E_B + E_{B'} + E_B + E_{B'} = 2 E_{B'} \leq 2$
- d)  $|E_B - E_{B'}| + |E_B + E_{B'}| = -E_B + E_{B'} - E_B - E_{B'} = - 2 E_B \leq 2$

Dunque la relazione (6.95) risulta dimostrata per il caso di eventi indipendenti.

### 6.7.3.2.2 Secondo passo: eventi correlati

Ipotizziamo che ci sia stata un correlazione a monte, che esistano cioè delle cause, rappresentate da variabili nascoste, che si sono attualizzate nel passato e che esse siano in grado di determinare le coppie  $\sigma\rho$  in maniera deterministica.

La variabile  $\lambda$  determina  $\sigma\rho$  e indichiamo con  $P(\lambda)$  la probabilità che nel passato la variabile  $\lambda$  sia stata attivata.

Diversamente da quanto previsto dalla (6.96)

$$P_{AB}(\sigma, \rho) \neq P_A(\sigma)P_B(\rho)$$

Scriviamo la probabilità congiunta introducendo una funzione caratteristica che tenga conto della presenza delle variabili nascoste:

$$P_{AB}(\sigma, \rho) = \sum_{\lambda} \chi_{AB}(\sigma, \rho; \lambda) P(\lambda) \tag{VI.6.99}$$

Dove  $\chi_{AB}(\sigma, \rho; \lambda) = 1$  se  $\lambda$  determina la coppia  $\sigma, \rho$  e vale 0 altrimenti.

Sembra che non sia cambiato nulla ma  $\chi_{AB}(\rho, \sigma; \lambda)$  risulta fattorizzabile e dunque ci consentirà di ricondurci al caso precedente; infatti se:

$$\chi_A(\sigma; \lambda) = \sum_{\rho} \chi_{AB}(\sigma, \rho; \lambda) \tag{VI.6.100}$$

$$\chi_B(\rho; \lambda) = \sum_{\sigma} \chi_{AB}(\sigma, \rho; \lambda)$$

Si può sempre scrivere:

$$\chi_{AB}(\sigma, \rho; \lambda) = \chi_A(\sigma; \lambda) \chi_B(\rho; \lambda)$$

$$P_{AB}(\sigma, \rho) = \sum_{\lambda} \chi_A(\sigma; \lambda) \chi_B(\rho; \lambda) P(\lambda)$$

In effetti il prodotto  $\chi_A(\sigma; \lambda) \chi_B(\rho; \lambda)$  vale 1 quando  $\lambda$  è in grado di determinare  $\sigma$  e  $\rho$  mentre vale 0 in tutti gli altri casi.

Tutto ciò basta per ricondursi al caso precedente perché

$E_{AB} = \sum_{\lambda} E_{AB}(\lambda)P(\lambda)$  dove si è posto:

$$E_{AB}(\lambda) = [\chi_A(+)\chi_B(+) + \chi_A(-)\chi_B(-)] - [\chi_A(+)\chi_B(-) + \chi_A(-)\chi_B(+)]$$

Si possono ora fare gli stessi ragionamenti che si facevano per le probabilità con l'unica differenza che mentre  $P \in [0,1]$  le  $\chi$  valgono 0 o 1.

Possiamo dunque definire una  $B_{CHSH}(\lambda)$

$$B_{CHSH}(\lambda) = E_{AB}(\lambda) - E_{A'B}(\lambda) + E_{A'B'}(\lambda) + E_{A'B''}(\lambda)$$
 e scrivere che

$$B_{CHSH} = \sum_{\lambda} B_{CHSH}(\lambda) P(\lambda)$$

E possiamo infine procedere alle maggiorazioni:

$$|B_{CHSH}| = \left| \sum_{\lambda} B_{CHSH}(\lambda) P(\lambda) \right| \leq \sum_{\lambda} |B_{CHSH}(\lambda)| P(\lambda) \leq$$

$$\leq \text{Max}_{\lambda} (|B_{CHSH}(\lambda)|) \sum_{\lambda} P(\lambda) = \text{Max}_{\lambda} (|B_{CHSH}(\lambda)|) \leq 2 \quad 42$$

Con ciò resta dimostrata la disuguaglianza CHSH che ha giocato un ruolo fondamentale negli esperimenti di conferma di quanto sostenuto da Bell circa la possibilità di costruire una teoria locale a variabili nascoste deterministica o probabilistica equivalente alla MQ.

### 6.7.3.3 conclusione

Le quattro funzioni  $A_{CHSH}$   $B_{CHSH}$   $C_{CHSH}$   $D_{CHSH}$  che producono la medesima disuguaglianza sono solitamente indicate con S e si scrive:

$$|S| \leq 2 \tag{VI.6.101}$$

$$S = E_{AB} - E_{A'B} + E_{A'B'} + E_{A'B''}$$



Nella dimostrazione che abbiamo fatto è stata sottintesa una assunzione forte che è stata messa in evidenza dallo stesso Bell dopo la pubblicazione di CHSH e cioè che i valori di  $\lambda$  siano gli stessi per tutti gli esperimenti e ciò è quanto cade nel caso della MQ perché in quel caso alcune delle *cause* vengono attualizzate nel momento della misura.

Si suppone cioè che:

$$P_{AB}(\lambda) = P(\lambda)$$

E tale ipotesi è detta *ipotesi della libera scelta* o della *non cospirazione*.

## 6.7.4 COME VANNO LE COSE IN AMBITO QUANTISTICO ?

### 6.7.4.1 Gli esperimenti di Alice e Bob

Consideriamo dunque il caso in cui i due sperimentatori (A)lice e (B)ob eseguano delle misure di polarizzazione su fotoni utilizzando angoli  $\alpha$  e  $\beta$  con le osservabili: <sup>43</sup>

$$|\alpha\rangle = \cos \alpha |\rightarrow\rangle + \sin \alpha |\uparrow\rangle \tag{VI.6.102}$$



<sup>42</sup> Per la dimostrazione precedente

<sup>43</sup> Dopo numerose consultazioni sul tema ho scelto di seguire l'impostazione, particolarmente efficace di "Valerio Scarani - Six Quantum Pieces A First Course in Quantum Physics"

$$|\alpha_{\perp}\rangle = \cos \alpha |\rightarrow\rangle + \sin \alpha |\uparrow\rangle$$

e analogamente per  $\beta$ .

Indichiamo con  $r_A(\alpha)$  e  $r_B(\beta)$  i risultati di ogni esperimento che darà esito favorevole (+1) o sfavorevole (-1).

Eseguendo gli esperimenti  $N$  volte con  $N \gg 1$  potremo determinare le quattro probabilità congiunte utilizzando le frequenze relative:

$$P(++(\alpha,\beta)) \quad P(--(\alpha,\beta)) \quad P(+-(\alpha,\beta)) \quad P(-+(\alpha,\beta))$$

Ipotizziamo ora che i fotoni che vanno in A e B si trovino nello *stato entangled* detto di *singoletto*:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\rightarrow\rangle|\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle|\rightarrow\rangle) \quad (\text{VI.6.103})$$

E calcoliamo le diverse probabilità attese attraverso la espressione in  $\rightarrow\uparrow$  di  $\alpha$  e  $\beta$  e la relazione di Born per le probabilità:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle|\beta\rangle &= (\cos \alpha |\rightarrow\rangle + \sin \alpha |\uparrow\rangle)(\cos \beta |\rightarrow\rangle + \sin \beta |\uparrow\rangle) \\ &= \cos \alpha \cos \beta |\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle + \sin \alpha \sin \beta |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \\ &+ \cos \alpha \sin \beta |\rightarrow\rangle|\uparrow\rangle + \sin \alpha \cos \beta |\uparrow\rangle|\rightarrow\rangle \end{aligned}$$

$$P(++(\alpha,\beta)) = |\langle \alpha | \langle \beta | |\psi\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) \right|^2$$

Si è eseguito il prodotto scalare e si è tenuto conto del carattere ortogonale della base  $|\rightarrow\rangle$  e  $|\uparrow\rangle$ .

### 6.7.4.2 Le relazioni sulle probabilità

Ne segue che:

$$\begin{aligned} P(++(\alpha,\beta)) &= \frac{1}{2} \sin^2(\beta - \alpha) = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos 2(\beta - \alpha)}{2} = \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos 2(\beta - \alpha)) = \frac{1}{4} (1 - \cos 2(\alpha - \beta)) \end{aligned}$$

Eseguendo esplicitamente il calcolo negli altri tre casi si ottiene:

$$P(--(\alpha,\beta)) = P(++(\alpha,\beta))$$

$$P(+-(\alpha,\beta)) = P(-+(\alpha,\beta)) = \frac{1}{4} (1 + \cos 2(\alpha - \beta))$$

Dunque le 4 probabilità sono date da:

$$P(++(\alpha,\beta)) = P(--(\alpha,\beta)) = \frac{1}{4} (1 - \cos 2(\alpha - \beta)) \quad (\text{VI.6.104})$$

$$P(+-(\alpha,\beta)) = P(-+(\alpha,\beta)) = \frac{1}{4} (1 + \cos 2(\alpha - \beta))$$

Osserviamo di sfuggita che se Alice e Bob eseguono lo stesso esperimento, cioè se  $\alpha = \beta$  si ottiene:

$$P(++(\alpha,\alpha)) = P(--(\alpha,\alpha)) = \frac{1}{4} (1 - 1) = 0$$

$$P(+-(\alpha,\alpha)) = P(-+(\alpha,\alpha)) = \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2}$$

dato lo stato particolare del singoletto.

### 6.7.4.3 Il coefficiente di correlazione

Introduciamo ora un coefficiente di correlazione tra le misure in A e B come differenza delle probabilità di ottenere esiti concordi e di esiti discordi. Precisamente:

$$E(\alpha, \beta) = P(+ + \vee - -) - P(+ - \vee - +) \tag{VI.6.105}$$

Questo coefficiente di correlazione varrà +1 in caso di correlazione piena e -1 in caso di anticorrelazione.

Nel caso già esposto del singoletto si avrà:

$$E(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} (1 - \cos 2(\alpha - \beta)) + \frac{1}{4} (1 - \cos 2(\alpha - \beta)) - \frac{1}{4} (1 + \cos 2(\alpha - \beta)) - \frac{1}{4} (1 - \cos 2(\alpha + \beta)) = -\cos 2(\alpha - \beta)$$

Dimostriamo ora che se indichiamo con  $\langle r(\alpha) \rangle$  e  $\langle r(\beta) \rangle$  i valori medi dei risultati vale la proprietà:

**Teorema**

$$E(\alpha, \beta) = -\cos 2(\alpha - \beta) = \langle r(\alpha) r(\beta) \rangle \tag{VI.6.106}$$



**Dimostrazione**

$r(\alpha) r(\beta)$  vale +1 quando i risultati sono correlati  $(+1)(+1) = (-1)(-1) = +1$  mentre vale -1 quando c'è anticorrelazione.

$$\begin{aligned} \langle r(\alpha) r(\beta) \rangle &= (+1) P(+ + \vee - -) + (-1) P(+ - \vee - +) = \\ &= P(+ + \vee - -) - P(+ - \vee - +) = E(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

A proposito dei temi sollevati da EPR e in particolare quello della apparente comunicazione a distanza legato agli stati entangled sono state avanzate due ipotesi:

- la prima è quella che i due fotoni comunicano istantaneamente ma ciò sarebbe in contrasto con tutto l'impianto della fisica che ha portato alla elaborazione della teoria della relatività. Come vedremo nel seguito, in realtà l'entanglement quantistico non mette in discussione il valore limite di  $c$  per la trasmissione di segnali, infatti la attualizzazione del valore di polarizzazione in A con immediato collasso in B in realtà non corrisponde a trasmissione di informazione. La M.Q. non propone alcun meccanismo di spiegazione di questa *strana correlazione* che Einstein aveva chiamato *sinistra azione a distanza*; si limita a prenderne atto e la rappresenta come una proprietà della natura.
- la seconda è quella che i due fotoni trasportino già l'informazione legata a qualsiasi tipo di misurazione attraverso variabili che si attualizzano nel momento in cui si effettua la misura (le cosiddette *variabili nascoste* la cui esistenza è stata proprio esclusa attraverso le due disuguaglianze di Bell e CHSH). Come vedremo tra breve.

### 6.7.4.4 Esperimento ideale alla CHSH

Supponiamo ora che venga effettuato un esperimento alla CHSH e che i due fotoni realizzino un accordo all'atto della loro generazione che consente loro di trasportare la informazione relativa ad ogni possibile risultato; ciò equivale ad ammettere l'esistenza di una variabile nascosta

$$\lambda = \{\lambda_A, \lambda_B\} \text{ con } \lambda_A = \{r_A(\alpha), r_A(\alpha')\} \quad \lambda_B = \{r_B(\beta), r_B(\beta')\}$$

Se sono note le variabili nascoste si può considerare la quantità:

$$S(\lambda) = [r_A(\alpha) + r_A(\alpha')] r_B(\beta) + [r_A(\alpha') - r_A(\alpha)] r_B(\beta') \tag{44}$$

**Teorema**

$$\forall \lambda, S(\lambda) = \pm 2 \tag{VI.6.107}$$



<sup>44</sup> A seconda di come si definisce questa quantità si ottengono l'una o l'altra delle 4 forme della disuguaglianza CHSH

**Dimostrazione**

La dimostrazione è di tipo diretto e consiste nell'esaminare le quattro possibilità dei termini in [ ] che indicheremo con  $\Sigma$  e  $\Delta$ .

$r_A(\alpha)$	$r_A(\alpha')$	$\Sigma$	$\Delta$
+1	+1	+2	0
+1	-1	0	-2
-1	+1	0	+2
-1	-1	-2	0

Ma  $r_B = \pm 1$  e dunque:  $\Sigma r_B + \Delta r_{B'} = \pm 2$

Ovviamente la verifica di ciò non può avvenire su un singolo esperimento visto che Alice e Bob possono sperimentare con due possibili osservabili e dunque dovremo utilizzare il valor medio di S relativo a N osservazioni esteso al caso  $N \gg 1$  e cioè

$$\langle S \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i$$



**Teorema**

$$\langle S \rangle = E(\alpha, \beta) + E(\alpha', \beta) + E(\alpha', \beta') - E(\alpha, \beta') \tag{VI.6.108}$$

**Dimostrazione**

La dimostrazione, ancora una volta è di tipo diretto;

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [r_i(\alpha)r_i(\beta) + r_i(\alpha')r_i(\beta) + r_i(\alpha')r_i(\beta') - r_i(\alpha)r_i(\beta')] \\ &= \langle r(\alpha)r(\beta) \rangle + \langle r(\alpha')r(\beta) \rangle + \langle r(\alpha')r(\beta') \rangle - \langle r(\alpha)r(\beta') \rangle \end{aligned}$$

ma  $\langle r(\alpha)r(\beta) \rangle = E(\alpha, \beta)$  in base alla (6.79) e così via; ne segue la tesi.

Ma Alice e Bob attraverso gli esperimenti possono calcolare il valor medio dei diversi prodotti dei risultati congiunti e dunque determinare sperimentalmente  $\langle S \rangle$

D'altro canto  $\langle S \rangle$  è la media di tanti termini che possono valere solo  $\pm 2$  e dunque sarà:

$$|\langle S \rangle| \leq 2 \tag{VI.6.109}$$

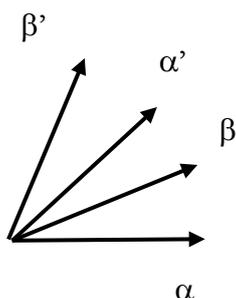
E tutto ciò ci permette di avere un criterio sperimentale per stabilire se i fotoni possono trasportare le variabili nascoste.

**6.7.4.5 La falsificazione della disuguaglianza**

Consideriamo il caso in cui sia:

$$\alpha = 0, \alpha' = \pi/4, \beta = \pi/8, \beta' = 3/8 \pi \tag{VI.6.110}$$

e applichiamo la (6.79)  $E(\alpha, \beta) = -\cos 2(\alpha - \beta) = -\cos 2(\beta - \alpha)$  otterremo allora:



$$E(\alpha, \beta) = -\cos 2(\beta - \alpha) = -\cos(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E(\alpha, \beta') = -\cos(3\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E(\alpha', \beta) = -\cos(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E(\alpha', \beta') = -\cos(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

da cui:

$$|\langle S \rangle| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 2 \tag{VI.6.111}$$

con una esplicita violazione della ipotesi delle variabili nascoste. Tale valore corrisponde alla violazione massimale della disegualianza CHSH ed è detto limite di Tsirelson.

### 6.7.4.6 La dipendenza di S dalle differenze angolari

Poiché, come sappiamo, le funzioni di correlazione dipendono solo dalle differenze angolari vale la pena di assumere una variabile angolare  $\theta$  pari alla differenza  $\alpha - \beta$  e considerare il caso in cui le differenze angolari siano le medesime; ci aspettiamo in quel caso di determinare una espressione di S relativamente semplice.

Sia dunque:

$$\alpha - \beta = \beta - \alpha' = \alpha' - \beta' = \theta \text{ e dunque } \alpha - \beta' = 3\theta$$

$$\begin{aligned} |S| &= |E(\alpha, \beta) + E(\alpha', \beta) + E(\alpha', \beta') - E(\alpha, \beta')| = \\ &= |-\cos 2\theta - \cos 2\theta - \cos 2\theta + \cos 6\theta| = |\cos 6\theta - 3\cos 2\theta| \end{aligned} \tag{VI.6.112}$$

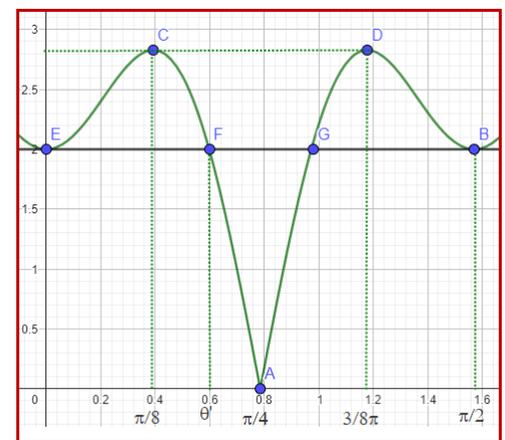
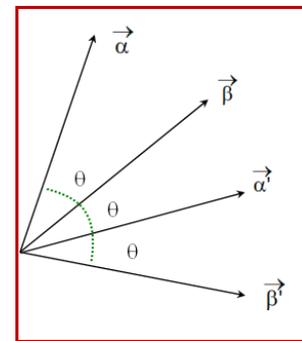
Si tratta di studiare l'andamento della funzione e il suo andamento viene rappresentato qui a lato con le funzioni goniometriche in radianti per  $\theta \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ .

Come si vede si tratta di una funzione simmetrica rispetto a  $\pi/4$ , che presenta due massimi (punto di massima violazione) a  $\pi/8$  e  $3/8\pi$ . La zona di violazione della disegualianza CHSH è quella tra E ed F e tra G e B.

L'ascissa del punto F corrisponde a:

$$\theta' = \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cong 0.598$$

Oltre che per  $\theta = \pi/8$  la massima violazione si verifica a  $3/8\pi$  e lasciamo al lettore la verifica diretta per sostituzione.



## 6.8 Gli esperimenti sulla violazione delle diseguaglianze di Bell (i Bell test)

Ero pronto a scrivere ma poi ho deciso che, data la importanza di questi esperimenti e, in particolare di quello di Alain Aspect, per il quale lo stesso Aspect ha avuto il premio Nobel, fosse meglio far parlare il diretto interessato.

E così ho tradotto un lavoro di Aspect scritto nel 2002 in occasione di un convegno per commemorare John Bell. Il relativo link lo trovate in coda a questo capitolo insieme a quello sui calzini del dr. Bertlmann.

In questo articolo, dopo una prima parte di descrizione del processo intellettuale che porta alla diseguaglianza, Aspect descrive a modo suo il lavoro di Bell e costruisce anche dei modelli che consentono di confrontare le teorie a variabili nascoste con le predizioni della MQ.

Terminata la parte riassuntiva del lavoro di Bell, Alain Aspect descrive dettagliatamente i suoi esperimenti entrando nel merito dei diversi problemi di natura sperimentale incontrati:

- Le cascate radiative che consentono di ottenere fasci di coppie di fotoni entangled
- I problemi di collimazione del fascio
- I tre successivi livelli degli esperimenti sino ad ottenere con un ingegnoso artificio la possibilità di ottenere orientamenti semi-casuali nella disposizione dei polarizzatori.
- Le problematiche risolte e quelle irrisolte

Gli ulteriori sviluppi legati all'entanglement e cioè: crittografia quantistica, teletrasporto, informatica quantistica faranno parte di un nuovo capitolo dedicato alla M.Q.

---

[I calzini di Bertlmann e la natura della realtà](#) – di J. S.Bell - Journal de Physique, 1981

---

[Il teorema di Bell – la visione ingenua di un fisico sperimentale](#) – di Alain Aspect – 2002

---